Devoir à la maison n°1 pour le 4 septembre 2017

Exercice 1

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par :
$u_0 = 1$, $v_0 = 2$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\quad u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} \qquad v_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4}$.

1. Soit $w_n = v_n - u_n$.
   (a) Montrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.
   (b) Donner l'expression de w_n en fonction de n.
   (c) Calculer la limite de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Soit $t_n = 8v_n + 3u_n$. Montrer que $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante.
3. Déduire des questions 1b. et 2. les expressions de u_n et v_n en fonction de n.
4. Déterminer les limites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2

Partie I :

On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 3x + y - 2z \\ 2y \\ x + y \end{pmatrix} \end{array}$$

On considère la famille (u_1, u_2, u_3) définie par $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer le noyau et l'image de f.
3. Donner la matrice A de f dans la base canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
4. Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
5. Exprimer $f(u_1)$ (respectivement $f(u_2)$, respectivement $f(u_3)$) comme combinaison linéaire de (u_1, u_2, u_3).
6. En déduire la matrice D de f dans la base (u_1, u_2, u_3).

Partie II :

1. Démontrer que $A^2 - 3A + 2I_3 = O_3$.
2. Démontrer par récurrence qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que, pour tout entier n, $A^n = a_n A + b_n I_3$.
   Donner les relations de récurrence vérifiées par $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Démontrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites récurrentes d'ordre 2.
4. En déduire les expressions de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de n, puis celle de A^n .
5. Justifier que A est inversible, et donner son inverse en fonction de A et I_3.

Exercice 3

Partie I : tirages dans une urne

Une urne $\mathscr{U}$ contient 1 boule noire et 4 boules blanches indiscernables au toucher.

1. On procède à 400 tirages successifs avec remise d'une boule dans $\mathscr{U}$. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de fois où la boule noire a été piochée.
   (a) Quelle est la loi de X ? On précisera $X(\Omega)$ et $P(X=k)$ pour tout $k \in X(\Omega)$.
   (b) Donner la valeur de l'espérance de X notée $E(X)$ et de la variance de X.
2. On procède cette fois-ci dans $\mathscr{U}$ à une suite de tirages avec remise d'une boule jusqu'à obtenir la boule noire. On appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.
   (a) Quelle est la loi de Y ? On précisera $Y(\Omega)$ et $P(Y=k)$ pour tout $k \in Y(\omega)$.
   (b) Donner la valeur de $E(Y)$ de $V(Y)$.
3. Cette fois-ci, on pioche dans l'urne $\mathscr{U}$ successivement et sans remise toutes les boules. On note Z le numéro du tirage auquel est apparue la boule noire.
   (a) Quelle est la loi de Z ? On précisera $Z(\Omega)$ et $P(Z=k)$ pour tout $k \in Z(\Omega)$.
   (b) Donner les valeurs de $E(Z)$ et de $V(Z)$.

Partie II : tirages dans une urne choisie au hasard

L'urne $\mathscr{U}$ contient toujours 1 boule noire et 4 boules blanches indiscernables au toucher. L'urne $\mathscr{V}$ contient 2 boules noires et 3 boules blanches indiscernables au toucher.
On lance une pièce équilibrée. Si elle retombe sur le côté Pile, on tire deux boules successivement et avec remise dans $\mathscr{U}$, et si on obtient Face, on tire deux boules successivement et avec remise dans $\mathscr{V}$.
On note T la variable aléatoire égale au nombre de fois où l'on a pioché une boule noire.

1. Que vaut $T(\Omega)$?
2. Déterminer la loi de T.
3. Calculer $E(T)$. La variable aléatoire T suit-elle une loi binomiale ?
4. Sachant que l'évènement $[T=1]$ est réalisé, est-il plus probable d'avoir obtenu Pile ou d'avoir obtenu Face avec la pièce ?
5. On admet qu'en langage Scilab l'instruction `grand(1,1,"uin",n1,n2)` renvoie un entier au hasard et uniformément compris entre `n1` et `n2`. Compléter le programme Scilab suivant afin qu'il affiche une simulation de la variable aléatoire T.

```
T = .........
if grand(1,1,"uin",1,2) == 1 then
  for k = 1:2
    if grand(1,1,"uin",1,5)<2 then
      T = T+1
    end
  end
else
  ............
  ............
  ............
```

```
    ............
    ............
end
disp(T,"Une simulation de T donne :")
```

Exercice 4

Partie I : étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^2} + 1$$

1. Calculer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement les résultats.
2. Étudier les variations de f.
3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f au point d'abscisse 1.
4. Etudier la convexité de f.
5. Tracer dans un repère orthonormé la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1, ainsi que l'allure de la courbe $\mathscr{C}_f$. On prendra : $e \approx 2.7$ et $\sqrt{e} \approx 1.6$.

Partie II : étude d'une suite

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = \sqrt{e}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$

1. Ecrire un programme SCILAB qui calcule et affiche les n premiers termes de cette suite pour un entier n entré par l'utilisateur.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n \leq \sqrt{e}$
3. Etudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
5. (a) Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = 3x^3 - 2x^2 - 1$. Justifier que 1 est racine de P et en déduire 3 réels a, b, c tels que $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$
   (b) Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = x^3 - x^2 - \ln x$. Etudier les variations de g.
   (c) Démontrer que $f(x) = x \Longleftrightarrow g(x) = 0$
6. Déduire des questions précédentes la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Partie III : étude d'une variable aléatoire à densité

1. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que pour tout réel A supérieur ou égal à 1 :

$$\int_1^A \frac{\ln(x)}{x^2} dx = 1 - \frac{1}{A} - \frac{\ln(A)}{A}$$

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \begin{cases} f(x) - 1 & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

   Montrer que h est une densité de probabilité.

3. On considère dans la suite de cet exercice une variable aléatoire X dont h est une densité.
   (a) Calculer la fonction de répartition F de la variable aléatoire X.

(b) Recopier et compléter les lignes du programme Scilab suivant pour que la fonction F prenne en entrée un réel x et calcule la valeur de $F(x)$.

```
1  function y=F(x)
2          if x < 1 then
3                  ..........
4          else
5                  ..........
6          end
7  endfunction
8
9  x=linspace(1,5,10);
10 plot(x,F)
```

(c) Qu'obtient-on lors de l'exécution des lignes 9 et 10 du programme précédent ?

4. X admet-elle une espérance ?

5. Calculer les probabilités $P(X \geq e)$, $\quad P_{(X\geq e)}(X \leq e^2)$.

6. Soit $A > 1$. Calculer $\lim\limits_{A\to+\infty} \left(P_{[X>A]}(X > 2A)\right)$.

Exercice 5

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ deux suites définies par :

$$u_1 = 1,\ v_1 = 2 \text{ et } \forall n \geq 1,\ u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n + v_n} \text{ et } v_{n+1} = \frac{v_n^2}{u_n + v_n}.$$

1. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a $u_n > 0$ et $v_n > 0$.
2. Montrer que les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont décroissantes et convergentes.
3. On pose $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\ell' = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.
   (a) Montrer que la suite $(u_n - v_n)_{n\geq 1}$ est constante et en déduire une relation entre ℓ et ℓ'.
   (b) En utilisant la relation $u_{n+1}(u_n + v_n) = u_n^2$, montrer que $\ell\,\ell' = 0$.
   (c) Déterminer ℓ et ℓ'.
4. Recopier et compléter les lignes **(6)** et **(7)** du programme *Scilab* suivant afin qu'il calcule et affiche les valeurs de u_n et v_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
(1) n=input('entrer la valeur de n :')
(2) u=1
(3) v=2
(4) for k=2:n
(5)    a=u
(6)    u=.........
(7)    v=.........
(8) end
(9) disp(u)
(10) disp(v)
```

5. Modifier le programme précédent pour qu'il calcule et affiche la somme des termes de la suite u.

Exercice 6

Soit M et I les matrices d'ordre 3 définies par : $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. (a) Calculer M^2 et M^3 et en déduire à l'aide d'un raisonnement par l'absurde que M n'est pas inversible.

   (b) Pour tout entier $n \geq 3$, déterminer M^n.

   (c) Calculer $(I - M)\left(I + M + M^2\right)$. En déduire que $(I - M)$ est inversible et donner son inverse $(I - M)^{-1}$.

2. On pose : $S = M + I$.

   (a) À l'aide de la formule du binôme, exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice S^n en fonction de I, M et M^2.

   (b) Déterminer l'expression de la matrice S^n en fonction de n.

3. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$, $(v_n)_{n\geq 0}$ et $(w_n)_{n\geq 0}$ les trois suites définies par :

$$u_0 = 0,\ v_0 = 1,\ w_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} & = 3u_n + v_n \\ v_{n+1} & = -3u_n + w_n \\ w_{n+1} & = u_n \end{cases}.$$

   (a) Établir pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'égalité : $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

   (b) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, la relation : $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = S^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$.

   (c) Exprimer u_n, v_n et w_n, en fonction de n. Montrer que $u_n + v_n + w_n = 1$.

4. Dans cette question, on se propose de déterminer une matrice J d'ordre 3, triangulaire supérieure, à coefficients diagonaux tous nuls et une matrice P d'ordre 3, inversible, qui vérifient la relation $J = PMP$.

   (a) On pose : $W = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer les matrices colonnes V et U définies par : $V = -MW$ et $U = M^2W$.

   (b) Soit P la matrice d'ordre 3 dont la première colonne est W, la deuxième est V et la troisième est U. Calculer P^2 ; en déduire que P est inversible et donner son inverse P^{-1}.

   (c) Expliciter la matrice $J = PMP$.

5. On considère les applications

$$f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 2x + y \\ -3x - y + z \\ x - z \end{pmatrix} \end{array} \qquad \text{et} \qquad g = f + id$$

   (a) Démontrer que f est une application linéaire.

   (b) Déterminer une base du noyau de f.

   (c) Justifier que M est la matrice de f dans la base canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   Donner la matrice N de g dans la base canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

(d) Soit $A = \left\{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), MX = -U\right\}$ où U est la matrice colonne définie au 4.a.
Soit $B = \left\{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), M^2X = -U\right\}$ où U est la matrice colonne définie au 4.a.
A et B sont-ils sont espaces vectoriels? Déterminer les éléments de A et B.

(e) Soit $C = \left\{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), NX = X\right\}$.
Justifier que C est un espace vectoriel. En donner une base.

(f) Montrer que (U, V, W) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ où U, V, W ont été définis au 4.a.

(g) Déterminer la matrice D de f dans la base (U, V, W) puis la matrice Δ de g dans la base (U, V, W).

Exercice 7

Un livreur hésite entre deux parcours : le parcours A plus long ou le parcours B plus court mais avec un feu tricolore le retardant parfois.

On constate que le parcours A est choisi dans 60% des cas et donc que le parcours B est choisi dans 40% des cas. Les choix sont supposés indépendants les uns des autres.

1. On note les différents parcours utilisé par le livreur. Par exemple, la suite $AABAA\ldots$ signifie que les deux premières fois le livreur a choisi le parcours A, la troisième fois il a choisi le parcours B, les quatrièmes et cinquième fois le parcours A.
On note X la variable aléatoire représentant la nombre de fois où le livreur a suivi le même parcours avant d'en changer pour la première fois.
Ainsi, dans l'exemple on a $X = 2$.

   (a) Justifier soigneusement la formule :
$$\forall k \geq 1 \quad P(X = k) = (0.4)^k (0.6) + (0.6)^k (0.4)$$

   (b) Vérifier par le calcul que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) = 1$

   (c) Déterminer l'espérance mathématique de X ainsi que la variance.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note : N_n la variable aléatoire représentant le nombre de fois où le livreur choisit le parcours A pendant les n premières fois, T_1 le numéro de la fois où pour la première fois le parcours A est choisi et T_2 le numéro de la fois où pour la deuxième fois le parcours A est choisi.

   (a) Déterminer la loi de N_n, son espérance mathématique et sa variance.

   (b) Déterminer la loi de T_1, son espérance mathématique et sa variance.

   (c) Montrer que
$$\forall k \geq 2, \quad P(T_2 = k) = (k-1)(0.6)^2 (0.4)^{k-2}$$

3. On suppose que le temps perdu en minutes sur le parcours B est représenté par la variable aléatoire Z dont une densité de probabilité f est donnée par :
$$\begin{cases} f(t) = te^{-t^2/2} \text{ si } t \geq 0 \\ f(t) = 0 \quad \text{si } t < 0 \end{cases}$$
(On rappelle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$)

   (a) Vérifier que f est bien une densité de probabilité.

   (b) Déterminer la fonction de répartition F_Z de Z.

   (c) Calculer l'espérance de la variable Z.

Exercice 8

[Facultatif]

1. On considère la fonction polynôme P définie pour tout x réel par : $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.
   Montrer que l'équation $P(x) = 0$ admet une racine réelle et une seule, α , et que α appartient à l'intervalle $]1;2[$.

2. Soit $D =]-1;+\infty[$. On considère la fonction numérique f définie sur D par : $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x^3}$
   On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé (on prendra comme unité 4 cm).
   (a) Etudier les variations de f.
   (b) Ecrire une équation de la droite $\mathscr{D}$ tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0. Etudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$ dans l'intervalle D .
   (c) Tracer la courbe $\mathscr{C}$, la droite $\mathscr{D}$ et la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

3. (a) Déterminer trois réels a, b, c, tels que, pour tout x dans l'ensemble de définition de f, on ait :
   $f(x) = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{bx+c}{x^2-x+1}$
   (b) x étant un nombre réel positif, justifier l'existence de la fonction F définie par : $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$ et la calculer.

4. On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout entier naturel n de $\mathbb{N}$, par : $u_n = \dfrac{(-1)^n}{(3n+1)(3n+2)}$
   puis la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$
   (a) Montrer que pour tout entier naturel n, on a :
   $$\int_0^1 t^{3n}(1-t)dt = \frac{1}{(3n+1)(3n+2)}$$
   (b) Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \int_0^1 (1-t)\frac{1-(-t^3)^{n+1}}{1+t^3}dt$$
   (c) Montrer que
   $$F(1) - S_n = (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^3}{1+t^3}\left[t^{3n}(1-t)\right]dt$$
   (d) Donner sur $[0,1]$ un majorant de $\dfrac{t^3}{1+t^3}$ et en déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |F(1) - S_n| \leq \dfrac{1}{9n^2}$
   (e) Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et donner sa limite.

.

Exercice 9

[Facultatif] Pour tout entier naturel k non nul, on pose $a_k = \dfrac{1}{k} - \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{t}$

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \qquad u_n = H_n - \ln n \qquad v_n = H_n - \ln(n+1)$

1. Démontrer que
   $$\forall n \geq 1, \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

2. (a) Démontrer que

$$\forall n \geq 1, \quad \ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln n$$

   (b) En déduire la limite de de $\dfrac{H_n}{\ln n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

3. (a) Démontrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

   (b) En déduire qu'elles convergent vers un réel γ. Ce réel est appelé **constante d'Euler**.

4. Ecrire une suite d'instructions SCILAB permettant d'obtenir une valeur approchée de γ à 10^{-5} près à l'aide des suites u et v.

5. (a) Démontrer que

$$\forall k \geq 1, \quad a_k = \frac{1}{k}\int_0^1 \frac{t}{t+k}\,dt$$

   (b) Démontrer que

$$\forall k \geq 2, \quad \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \leq a_k \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)$$

   (c) En déduire que pour tous entiers naturels p et n tels que $p > n \geq 1$ on a

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{p+1}\right) \leq v_p - v_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{p}\right)$$

   (d) En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 1$ on a :

$$\frac{1}{2n+2} \leq \gamma - v_n \leq \frac{1}{2n}$$

6. (a) On pose pour tout entier naturel $n \geq 1$, $w_n = v_n + \dfrac{1}{2n+2}$. Démontrer que

$$0 \leq \gamma - w_n \leq \frac{1}{2n(n+1)}$$

   (b) Déterminer un entier N tel que w_N soit une valeur approchée de γ à 10^{-5} près.

   (c) Ecrire une suite d'instructions SCILAB permettant d'obtenir w_N.