REVISIONS ECE1
E.SWIADEK

Table des Matières

Chapitre 1

Calcul matriciel

1.1 Résumé de cours

1. **Généralités**
   - Une matrice à n lignes et p colonnes est une application $A:(i,j)\to a_{i,j}$ de $[1..n]\times[1..p]$ dans $\mathbb{R}$; on la note $A=(a_{ij})$ et, si $n=p$, on la dit carrée.
     On note $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble de ces matrices, ou $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ si $n=p$.

   - Si $p=1$ on parle de **matrice colonne** ; si $n=1$ on parle de **matrice ligne**
     La matrice dont tous les termes sont nuls est appelée **matrice nulle** et notée $O_{n,p}$
     La matrice $A=(a_{ij})\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est **triangulaire supérieure** si et seulement si on a : $i>j\Rightarrow a_{ij}=0$
     La matrice $A=(a_{ij})\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est **triangulaire inférieure** si et seulement si on a : $i<j\Rightarrow a_{ij}=0$
     On appelle **matrice scalaire** une matrice diagonale dont tous les termes diagonaux sont égaux.
     On appelle **matrice identité** la matrice diagonale dont tous les termes diagonaux valent 1.
2. **Opérations**
   - Soient des matrices $A=(a_{ij})$ et $B=(b_{ij})$ de $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{R})$ et $\lambda\in\mathbb{R}$.
     On définit des matrices $S=A+B$ et $C=\lambda.A$ de $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{R})$ en posant :

$$\forall i\in[1..n],\forall j\in[1..p],\quad s_{ij}=a_{ij}+b_{ij},\quad c_{ij}=\lambda\times a_{ij}$$

   - Soient deux matrices $A=(a_{ij})\in\mathscr{M}_{np}(\mathbb{R})$ et $B=(b_{ij})\in\mathscr{M}_{pq}(\mathbb{R})$.
     Leur produit $C=A\times B$ est la matrice $C=(c_{ij})\in\mathscr{M}_{nq}(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall i\in[1..n],\ \forall j\in[1..q],\quad \boxed{c_{ij}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}}$$

   - Si les matrices A,B,C sont de tailles convenables :
     - $A(BC)=(AB)C$
     - $A(\lambda.B)=\lambda.(AB)=(\lambda.A)B$
     - $A(B+C)=AB+AC$ et $(B+C)A=BA+CA$
3. **Transposée**
   - Soit $A=(a_{ij})\in\mathscr{M}_{np}(\mathbb{R})$ On appelle transposée de A la matrice notée ${}^tA=(a'_{ij})\in\mathscr{M}_{pn}(\mathbb{R})$ avec $\forall i\in[\![1,p]\!],\forall j\in[\![1,n]\!],a'_{ij}=a_{ji}$

- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R}), \forall B \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{R})$
  - ${}^t({}^t A) = A$
  - ${}^t(A+\lambda B) = {}^t A + \lambda {}^t B$
  - ${}^t(AB) = {}^t B\, {}^t A$

4. **Cas des matrices carrées**
   - Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $A^0 = I_n$ et $\forall k \in \mathbb{N}, \quad A^{k+1} = A.A^k$
   - Si A est triangulaire supérieure, $\quad A^k$ l'est aussi et les coefficients diagonaux de A^k sont les puissances k-ièmes des coefficients diagonaux de A.
   - Si A est diagonale, A^k l'est aussi et les coefficients diagonaux de A^k sont les puissances k-ièmes des coefficients diagonaux de A.
   - **Formule du binôme** : si $AB = BA$ alors $(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$
   - A est **symétrique** $\Leftrightarrow {}^t A = A$ et on appelle $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques.
   - $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = BA = I_n$
     et on a alors $B = A^{-1}$
     On note $GL_n(\mathbb{R})$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices inversibles.

   - Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible alors $AB = AC \Rightarrow B = C$
   - Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible alors $BA = CA \Rightarrow B = C$
   - Si $\exists B \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}, AB = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ alors A n'est pas inversible.
   - Si A et B appartiennent à $GL_n(\mathbb{R})$ alors :

$$A \in GL_n(\mathbb{R}) \text{ et } \left(A^{-1}\right)^{-1} = A$$

$${}^t A \in GL_n(\mathbb{R}) \text{ et } \left({}^t A\right)^{-1} = {}^t\left(A^{-1}\right)$$

$$AB \in GL_n(\mathbb{R}) \text{ et } (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

   - $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible $\Leftrightarrow \forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = Y$

5. **Systèmes** Les opérations élémentaires sur les lignes sont :
   - Pour $i \neq j$ et $b \in \mathbb{R}$ on remplace L_i par $L_i + bL_j$
   - Pour $a \in \mathbb{R}^*$ on remplace L_i par aL_i
   - Pour $i \neq j$ on échange L_i et L_j.

1.2 Exercices

Exercice 1.1 (**) :(solution ►)
On considère la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2 et A^3. En déduire A^n pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3.
2. Calculer $(I-A)(I+A+A^2)$, I désignant la matrice unité carrée d'ordre 3.
   En déduire que $I - A$ est inversible et calculer $(I-A)^{-1}$

3. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

   Calculer P^2 et en déduire P^{-1}.

4. On pose $A' = PAP$, $\quad N = I + A$, $\quad N' = PNP$

   (a) Que dire de A'^3. En déduire que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, $A'^n = 0$.

   (b) Montrer que $N' = I + A'$.

   (c) En déduire le calcul de N'^n puis de N^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On écrira explicitement la matrice N^n.

Exercice 1.2 (**) :(solution ►)

Soient

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer LM et ML.

2. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, L^n = 3^{n-1} L$ et $M^n = 3^{n-1} M$.

3. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, A^n = 3^{n-1} \left(L + (-1)^n M\right)$.

4. On pose $B = \dfrac{1}{9} \begin{pmatrix} 7 \\ -13 \\ 15 \end{pmatrix}$. Déterminer $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que $X = \dfrac{1}{9} A + B$.

5. On pose $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ où $(x_n), (y_n), (z_n)$ désignent 3 suites. On veut déterminer la limite des suites vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \dfrac{1}{9} U_n + B$.

   (a) On pose $V_n = U_n - X$. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, W_n = \dfrac{1}{9^n} A^n W_0$.

   (b) En déduire la limite des suites $(x_n), (y_n), (z_n)$ quand n tend vers $+\infty$.

Chapitre 2

Suites

2.1 Résumé de cours

1. **Récurrence**
   - Principe de récurrence faible: Soit $P(n)$ une assertion définie sur $\mathbb{N}$ (i.e. dépendant de $n \in \mathbb{N}$).
     Si on a $P(0)$ (initialisation) et $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1)$ (hérédité)
     alors $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ (elle est vraie pour tout entier naturel n)
   - Principe de récurrence avec prédécesseurs : Soit $P(n)$ une assertion définie sur $\mathbb{N}$.
     Si on a $P(n_0)$ et $P(n_0+1)$ (initialisation) et $\forall n \geq n_0, (P(n)$ et $P(n+1)) \Rightarrow P(n+2)$ (hérédité)
     alors $\forall n \geq n_0, P(n)$ (elle est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$)
   - Principe de récurrence forte: Soit $P(n)$ une assertion définie sur $\mathbb{N}$.
     Si on a $P(0)$ (initialisation) et $(P(0)$ et $P(1)\ldots$ et $P(n)) \Rightarrow P(n+1)$ (hérédité)
     alors $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ (elle est vraie pour tout entier naturel n)
2. **Définitions**.
   - — (u_n) est **majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$.
     — (u_n) est **minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$.
     — (u_n) est **bornée** si et seulement si elle est majorée et minorée.
   - Soit $\ell \in \mathbb{R}$; on dit que la suite réelle (u_n) converge vers ℓ si et seulement si
     $\boxed{\forall \varepsilon > 0, \quad \exists p \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon}$
   - On dit que (u_n) diverge vers $+\infty$ si et seulement si $\boxed{\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists p \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow u_n \geq A}$
   - $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = \begin{cases} +\infty \text{ si } q > 1 \\ 1 \text{ si } q = 1 \\ 0 \text{ si } -1 < q < 1 \\ \text{pas de limite si } q \leq -1 \end{cases}$
   - $Si\, \alpha > 0, \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} = 0$
   - Si une suite converge, alors elle est bornée.
   - — (u_n) est croissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$.
     — (u_n) est décroissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_{n+1}$.
     — (u_n) est constante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_{n+1}$.
     — (u_n) est monotone si elle est soit croissante, soit décroissante.
   - Si une suite (u_n) est croissante et majorée, alors elle converge .
   - Si une suite (u_n) est décroissante et minorée, alors elle converge .
   - Si (u_n) est une suite croissante non majorée, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
   - Si (u_n) est une suite décroissante non minorée, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

3. **Convergence et ordre**.
   - Soit une suite (u_n) qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}$
     — (au sens strict): si $\ell > 0$, alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang
     — (au sens large): si $u_n \geq 0$ à partir d'un certain rang, alors $\ell \geq 0$
   - Soient $(u_n), (v_n)$ 2 suites telles qu'à partir d'un certain rang on ait $u_n \geq v_n$
     Si de plus $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$
     alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
   - Soient $(u_n), (v_n)$ 2 suites telles qu'à partir d'un certain rang on ait $u_n \leq v_n$.
     Si de plus $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$
   - Soient $(u_n), (v_n), (w_n)$ 3 suites telles qu'à partir d'un certain rang on ait $v_n \leq u_n \leq w_n$.
     Si de plus $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$ où ℓ est un réel alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$
   - Soient $(u_n), (v_n)$ 2 suites telles qu'à partir d'un certain rang n_0 on ait $u_n \leq v_n$.
     Si de plus $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell'$ où ℓ et ℓ' sont deux réels alors $\ell \leq \ell'$
4. **Opérations**.
   - Si les suites (u_n) et (v_n) convergent respectivement vers ℓ et ℓ', alors la suite $(u_n + v_n)$ converge vers $\ell + \ell'$.
   - Si (u_n) diverge vers $+\infty$ et (v_n) est minorée, alors $(u_n + v_n)$ diverge vers $+\infty$
   - — Si (u_n) converge vers ℓ alors (λu_n) converge vers $\lambda\ell$
     — Si (u_n) converge vers 0 et si (v_n) est bornée, alors la suite $(u_n v_n)$ converge vers 0.
     — Si (u_n) converge vers ℓ et (v_n) converge vers ℓ' alors $(u_n v_n)$ converge vers $\ell\ell'$
     — Si (u_n) diverge vers $+\infty$ et (v_n) admet un minorant strictement positif alors $(u_n v_n)$ diverge vers $+\infty$
   - — Si (u_n) converge vers $\ell \neq 0$ alors la suite $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$ est définie à partir d'un certain rang et converge vers $\dfrac{1}{\ell}$.
     — Si (u_n) converge vers ℓ et (v_n) vers m avec $m \neq 0$, alors alors la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est définie à partir d'un certain rang et converge vers $\dfrac{\ell}{m}$.
     — Si (u_n) diverge vers $+\infty$ alors $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$ converge vers 0.
     — Si (u_n) est strictement positive et converge vers 0 alors $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$ diverge vers $+\infty$.
5. **Autres**.
   - (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes si
     l'une est croissante, l'autre est décroissante, $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$
   - Si deux suites sont adjacentes alors si (u_n) est croissante et (v_n) décroissante on a pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$
     (et si (u_n) est décroissante et (v_n) croissante on a pour tout $n \in \mathbb{N},\ \ v_n \leq u_n$)
     De plus les deux suites sont convergentes et ont la même limite.
   - Soit $\alpha > 0$, $q > 1$, $b \geq 1$;
     $$\lim \frac{q^n}{n^\alpha} = +\infty \qquad\qquad \lim \frac{q^n}{(\ln n)^b} = +\infty$$
6. **Suites particulières**.
   - Suites arithmétiques :
     On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite arithmétique** lorsqu'il existe un réel r (la raison) tel que :
     $$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$$
     Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 alors :
     $$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr = u_p + (n-p)r$$

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{(n+1)(u_0+u_n)}{2}$$

- Suites géométriques :
  On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite géométrique** lorsqu'il existe un réel q (la raison) tel que :

  $$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = q.u_n$$

  Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 alors :

  $$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, u_n = u_0.q^n = u_p.q^{n-p}$$

  $$\sum_{k=0}^{n} u_k = \begin{cases} (n+1)u_0 \text{ si } q = 1 \\ u_0 \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} \text{ si } q \neq 1 \end{cases}$$

- Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 :
  On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite récurrente linéaire d'ordre 2** lorsqu'il existe deux nombres réels a et b , deux réels u_0 et u_1 tels que :

  $$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = a.u_{n+1} + b.u_n$$

  On pose l'équation caractéristique $x^2 - ax - b = 0$
  — Si elle admet deux racines distinctes λ_1 et λ_2

  $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = A\left(\lambda_1^n\right) + B\left(\lambda_1^n\right) \text{ où } (A,B) \in \mathbb{R}^2$$

  — Si elle admet une racine double λ alors

  $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (An+B)\left(\lambda^n\right) \text{ où } (A,B) \in \mathbb{R}^2$$

- Suites arithmético-géométriques :
  On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique lorsqu'il existe deux nombres complexes a et b , tels que

  $$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$$

  Si $a = 1$ on se ramène à une suite arithmétique. Sinon :
  On pose $v_n = u_n - \dfrac{b}{1-a}$ et on montre que c'est une suite géométrique de raison a
  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_0.a^n$ d'où $u_n = a^n\left(u_0 - \dfrac{b}{1-a}\right) + \dfrac{b}{1-a}$

2.2 Méthodes

1. *Démontrer une propriété par récurrence* :
   On vérifie que la propriété est vraie au premier rang pour laquelle on peut l'écrire.
   On suppose qu'elle est vraie au rang n.
   On démontre par un calcul qu'elle est vraie au rang $n+1$ en utilisant dans le calcul la supposition précédente à un moment donné.

2. *Démontrer qu'une suite est arithmétique :*

↪ On calcule $u_{n+1} - u_n$: si le résultat est un nombre réel r (indépendant de n) alors la suite est arithmétique de raison ce nombre et on a les formules :

$u_n = u_0 + nr \quad u_n = u_p + (n-p)r \quad S_n = \text{(nb termes)} \times \dfrac{\text{premier terme+dernier}}{2}$

3. *Démontrer qu'une suite est géométrique* :

↪ On calcule $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$: si le résultat est un nombre réel q (indépendant de n) alors la suite est géométrique de raison ce nombre et on a les formules :

$u_n = u_0 q^n \quad u_n = u_p q^{n-p} \quad S_n = \text{(premier terme)} \times \dfrac{1-q^{\text{nb terme}}}{1-q}$

4. *Reconnaitre et étudier une suite arithmético-géométrique* :

Elles sont de la forme $u_{n+1} = au_n + b$

↪ On résout $\ell = a\ell + b$

↪ On pose $v_n = u_n - \ell$ et on détermine la relation de récurrence vérifiée par v_n.

↪ on remarque que v_n est géométrique, on détermine son terme général, puis celui de u_n.

5. *Reconnaitre et étudier une suite récurrente linéaire double* :

Elles sont de la forme $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$

↪ On détermine l'équation caractéristique $x^2 - ax - b = 0$ puis on calcule, avec les formules vues dans le cours, la solution générale :

↪ Si elle admet deux racines distinctes λ_1 et λ_2 alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = A\left(\lambda_1^n\right) + B\left(\lambda_2^n\right) \text{ où } (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

Si elle admet une racine double λ alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (An + B)\left(\lambda^n\right) \text{ où } (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

↪ On détermine les constantes A et B grâce à la donnée de u_0 et u_1 et en résolvant un système.

6. *Etudier le sens de variation d'une suite*

↪ étudier le signe de la différence : s'il est positif, la suite est croissante, s'il est négatif, elle est décroissante.

↪ si la suite est à termes strictement positifs, on peut comparer le rapport à 1 : s'il est supérieur, la suite est croissante, s'il est inférieur, elle est décroissante.

↪ Si la suite est du type = f(n) , alors on étudie le sens de variation de f sur l'intervalle]0 ;+∞ [et la suite a le même sens de variation que f.

7. *Prouver une majoration par un réel M ou une minoration par un réel m*

↪ Comparer u_n et M(ou m) en utilisant les opérations et règles élémentaires sur les inégalités.

↪ Etudier le signe de u_n-M(ou m).

↪ Utiliser un raisonnement par récurrence.

8. *Montrer que deux suites sont adjacentes*

↪ Prouver que l'une est croissante, l'autre décroissante et que la limite de la différence est égale à 0.

Ne pas oublier la conséquence : les deux suites convergent alors vers un même réel.

9. *Montrer la convergence d'une suite* **Il est ici important de savoir si on demande uniquement la convergence ou la convergence et la limite ; bien lire l'ensemble des questions.**
   $\hookrightarrow$ Montrer que la suite est croissante, majorée ou que la suite est décroissante minorée. On applique ensuite le théorème de convergence monotone.
   $\hookrightarrow$ On peut aussi penser à utiliser le théorème d'encadrement mais dans ce cas on fait plus que prouver la convergence : on trouve aussi la limite.

10. *Calculer la limite d'une suite*
   $\hookrightarrow$ Utiliser les règles opératoires sur les limites et les limites usuelles. En particulier le résultat spécifique :

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{si -1<q<1} \\ +\infty & \text{si q>1} \\ 1 & \text{si q=1} \\ & \text{pas de limite si } q \leq -1 \end{cases} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{q^n}{n!} = 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

   $\hookrightarrow$ Utiliser un théorème d'encadrement
   $\hookrightarrow$ Si $u_n = f(n)$ utiliser le calcul de la limite de f en $+\infty$
   $\hookrightarrow$ si (u_n) est du type $u_{n+1} = f(u_n)$, si de plus on sait déjà que (u_n) converge vers un réel ℓ, et si enfin f est continue, alors ℓ est solution de l'équation $f(\ell) = \ell$.

11. *Suites $u_{n+1} = f(u_n)$*
   $\hookrightarrow$ On montre que (u_n) est **croissante et majorée**, et on en conclut que u_n converge vers un réel ℓ par le théorème de convergence des suites monotones.
   Ou
   On montre que (u_n) est **décroissante et minorée**, et on en conclut que u_n converge vers un réel ℓ par le théorème de convergence des suites monotones.
   (On détermine la limite à l'aide de la relation $f(\ell) = \ell$ obtenue par passage à la limite de $u_{n+1} = f(u_n)$ comme indiqué ci-dessus)

   $\hookrightarrow$ Dans d'autres cas de figure on est amené à utiliser l'inégalité des accroissements finis si dans une question précédente on a demandé un résultat sur $|f'(x)|$.
   Le théorème des accroissements finis permet d'obtenir une relation du type $|u_{n+1}-\alpha| \leq M|u_n-\alpha|$, avec M un majorant de $|f'(x)|$ sur I.
   A partir de là, on obtient par récurrence sur n la relation $|u_n - \alpha| \leq M^n|u_0 - \alpha|$, qui permet, lorsque $M < 1$, de conclure avec le théorème de comparaison.

12. *Suites définies implicitement* c'est-à-dire que les termes de la suite sont définies comme uniques solutions de problèmes (généralement des équations).
   $\hookrightarrow$ Souvent u_n est défini comme solution de l'équation $f_n(x) = 0$ où f_n est une fonction donnée dépendant de n donc on montre à l'aide du théorème de la bijection que cette équation admet une unique solution notée u_n.
   $\hookrightarrow$ On va utiliser dans toutes les questions le fait que $f_(u_n) = 0$ mais aussi que $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$ astucieusement par exemple pour trouver le sens de variation de la suite à l'aide du sens de variation de f_n et d'encadrements.

13. *Suites définies par des intégrales* La plupart des résultats sur la suite sont alors obtenus à l'aide des propriétés des intégrales.
   ↪ Pour obtenir une majoration ou une minoration, on majore ou minore la fonction dans l'intégrale pour ensuite intégrer l'inégalité obtenue en écrivant rigoureusement le théorème de croissance de l'intégrale.
   ↪ Pour obtenir le sens de variation de la suite on écrit $u_{n+1} - u_n$ sous forme d'une seule intégrale et on cherche le signe de la fonction pour intégrer l'inégalité : pour ce faire on est amené à mettre la quantité au même dénominateur puis à factoriser au maximum les expressions.
   ↪ Pour obtenir la limite de la suite, on utilise presque systématiquement un encadrement obtenu pour utiliser le théorème d'encadrement.

2.3 Exercices

Exercice 2.1 (*) :(solution ►)
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et la relation $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + 4$.
Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 2.2 (*) :(solution ►)
Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$
Démontrer que pour tout $n \geq 1$: $\dfrac{-1}{n} \leq u_n \leq \dfrac{1}{n}$. En déduire la limite de (u_n) .

Exercice 2.3 (**) :(solution ►)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1} = u_n(2 - u_n)$.

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < 1$.
2. Montrer que la suite est croissante.
3. En déduire que la suite converge et déterminer sa limite.
4. On considère la suite numérique (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = 1 - u_n$.
   (a) Exprimer, pour tout entier n, v_{n+1} en fonction de v_n.
   (b) En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
   (c) Déterminer la limite de la suite (v_n), puis retrouver celle de la suite (u_n).

Exercice 2.4 (**) :(solution ►)
Soit la suite vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = e\sqrt{u_n}$ avec $u_0 > 0$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 0$.
   On introduit la suite auxiliaire t définie par $\forall n \in \mathbb{N}, \quad t_n = \ln u_n$.
2. Justifier que la suite t est arithmético-géométrique.
3. En déduire l'expression de t_n en fonction de n, t_0 puis de u_n en fonction de n, u_0.
   En déduire la convergence de la suite u et donner sa limite.

Exercice 2.5 (**) :(solution ►)

Soit u la suite vérifiant la relation $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \sqrt{u_n u_{n+1}}$ avec $u_0 = 1$ et $u_1 = e$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 0$
   (on posera comme hypothèse de récurrence "$u_n > 0$ et $u_{n+1} > 0$").
   On considère alors la suite w définie par $\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \ln u_n$.
2. Montrer que la suite w est récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
3. Expliciter w_n en fonction de n, w_1, w_0 et en déduire sa limite en $+\infty$.
4. Calculer alors la limite de u en $+\infty$ en fonction de u_0, u_1.

Exercice 2.6 (***) :(solution ►)

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction f_p définie sur $]0\,; +\infty[$ par : $f_p(x) = 1 + \ln(x + p)$

On pose $h_p(x) = x - f_p(x)$

1. Montrer que l'équation $f_p(x) = x$ admet une unique solution α_p sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
2. Déterminer le signe de $h_p(\alpha_{p+1})$ et en déduire que la suite $(\alpha_p)_{p\geq 1}$ est monotone.
3. Prouver que l'on a:
   $$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \alpha_p \geq 1 + \ln(p)$$
   Quel est le comportement de la suite $(\alpha_p)_{p\geq 1}$ lorsque p tend vers $+\infty$?

Chapitre 3

Fonctions réelles d'une variable réelle

3.1 Résumé de cours

1. **Fonctions polynomiales** $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$

   - Le *degré* d'un polynôme non nul P est l'entier n tel que $\forall k > n$, $a_k = 0$ et $a_n \neq 0$. On le note $d^o A$. Le degré du polynôme nul est $-\infty$, par convention.
     a_n est alors appelé **coefficient dominant**.
   - L'ensemble des polynômes à coefficients réels est noté $\mathbb{R}[X]$ et l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n est noté $\mathbb{R}_n[X]$.
   - $\forall P \in \mathbb{R}[X], \forall Q \in \mathbb{R}[X], \forall \lambda \in R$

     (a) $d^o(\lambda P) = d^o P$ si $\lambda \neq 0$ et $-\infty$ si $\lambda = 0$

     (b) $d^o(PQ) = d^o(P) + d^o(Q)$

     (c) $d^o(P+Q) \leq \max(d^o P, d^o Q)$; De plus, si $d^o P \neq d^o Q$, alors il y a égalité

   - Soit $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. On appelle polynôme dérivé du polynôme P le polynome P' défini par

     $$P'(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} x^k$$

     $\forall P \in \mathbb{R}[X], \forall Q \in \mathbb{R}[X], \forall \lambda \in R$

     (a) $(\lambda P + Q)' = \lambda P' + Q'$

     (b) $(PQ)' = P'Q + PQ'$

     (c) $P' = Q' \Leftrightarrow P - Q$ est un polynôme constant.

   - **Division euclidienne :**
     Soient $A \in \mathbb{R}[X]$ et $B \in \mathbb{R}[X]$. On dit que B divise A et on note $B|A \Leftrightarrow \exists Q \in \mathbb{R}[X], A = BQ$
     On dit alors que B est un diviseur de A ou que A est un multiple de B.

     Th de la division euclidienne :
     Soient $A \in \mathbb{R}[X]$,$B \in \mathbb{R}[X]$, avec B non nul.
     Il existe alors un unique couple (Q, R) de polynômes tel que $\begin{cases} A = BQ + R \\ d^o R < d^o B \end{cases}$
   - **Racines et propriétés :**

     (a) $a \in \mathbb{R}$ est dit *racine* du polynôme P si et seulement si $P(a) = 0$

(b) a est racine de P si et seulement si $x-a$ divise P.

(c) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ où $a \neq b$. Alors a et b sont racines de P si et seulement si $(x-a)(x-b)$ divise P.

(d) Un polynôme de degré $n > 0$ admet au plus n racines distinctes.

(e) $a \in \mathbb{R}$ est *racine d'ordre* $m \in \mathbb{N}$ de $P \in \mathbb{R}[X]$ si et seulement si

$$\exists Q \in \mathbb{R}[X] \quad P(x) = (x-a)^m Q(x) \quad \text{et} \quad Q(a) \neq 0$$

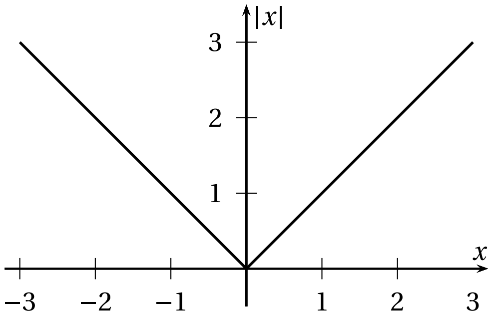
(f) Soit $a \in \mathbb{R}$ racine de $P \in \mathbb{R}[X]$; elle est d'ordre m si et seulement si :

$$P(a) = P'(a) = \dots P^{(m-1)}(a) = 0 \quad \text{et} \quad P^{(m)}(a) \neq 0$$

(g) Un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ admettant plus de $n+1$ racines distinctes est nul.

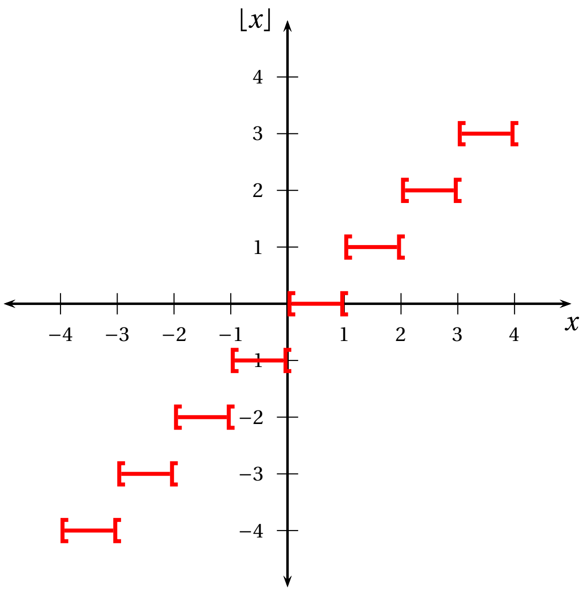
2. **Fonction valeur absolue :**

Pour tout réel x la valeur absolue notée $|x|$ est définie par $|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x > 0 \end{cases}$



- **Fonction partie entière :**

Pour tout réel x la partie entière notée $\lfloor x \rfloor$ est définie par : $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$

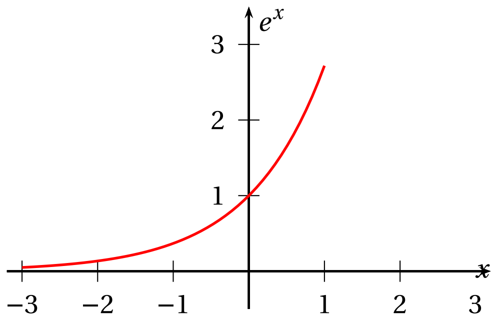


3. **Fonction exponentielle :**

$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad e^{a+b} = e^a e^b$

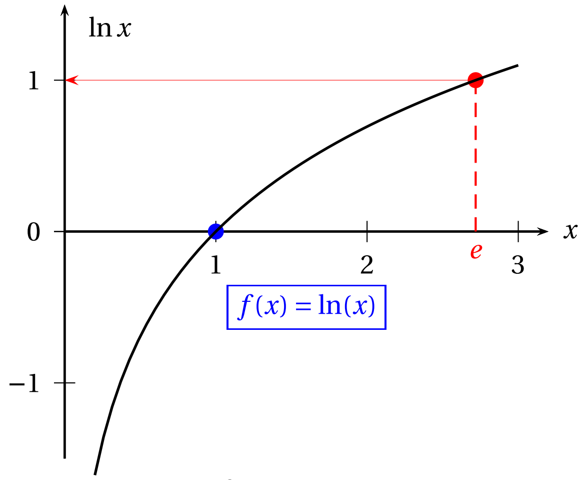
$\forall b \in \mathbb{R}, \quad e^{-b} = \dfrac{1}{e^b}$ d'où $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$ et
$\forall a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (e^a)^n = e^{na}$

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geq 1 + x$



$e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$ et $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$ car l'exponentielle est bijective et strictement croissante

4. **Logarithme népérien :**



$\forall (a,b) \in]0,+\infty[^2, \quad \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$

$\forall b \in]0,+\infty[, \quad \ln(1/b) = -\ln(b)$ d'où $\forall (a,b) \in]0,+\infty[^2, \quad \ln\dfrac{a}{b} = \ln(a) - \ln(b)$ et
$\forall a \in]0,+\infty[, \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \ln a^n = n\ln(a)$

$\forall x > 0, \quad \ln(x) \leq x - 1$

5. **Limites :**

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

$\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\exp(x)-1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\exp(x)}{x} = +\infty, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\exp(x)}{x^n} = +\infty$ où $n \in \mathbb{N}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x\exp(x) = 0, \quad \lim\limits_{x\to-\infty} x^n \exp(x) = 0$ où $n \in \mathbb{N}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

$\lim\limits_{x\to0} \ln x = -\infty$

$\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\ln(x)}{x-1} = 1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$ où $n \in \mathbb{N}^*$

$\lim\limits_{x\to0} x\ln x = 0, \quad \lim\limits_{x\to0} x^n \ln x = 0$ où $n \in \mathbb{N}^*$

6. **Fonction puissance :**
$\forall x > 0, \forall y >, \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 : x^a x^b = x^{a+b} \qquad \left(x^a\right)^b = x^{ab} \qquad x^a y^a = (xy)^a$

La fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $y \mapsto y^{\frac{1}{n}}$ est appelée fonction racine n-ième. On note $y^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{y}$.

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*$. $\left(a^p\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{p}{n}}$

7. **Autres exponentielles et logarithmes :**

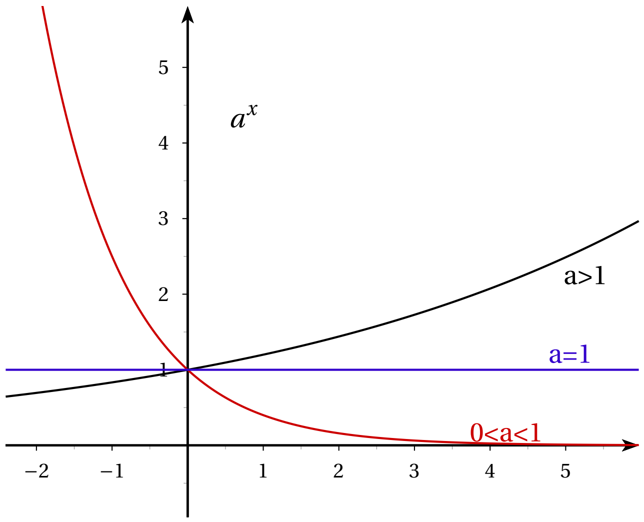
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad a^x = e^{x \ln a}$

Si $a \neq 1$ alors la fonction exponentielle de base a défini une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0;+\infty[$

Sa fonction réciproque est la fonction logarithme de base a définie sur $]0;+\infty[$ par $log_a : x \mapsto \dfrac{\ln x}{\ln a}$

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, a^{xy} = (a^x)^y$ et $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$

Si b est un réel strictement positif, $\forall x \in \mathbb{R}, (ab)^x = a^x b^x$ et $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$



8. **Croissances comparées :**

$$\text{Soit } \alpha > 0, \quad a > 1, \quad b > 1 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\log_b x}{x^\alpha} = 0$$

$$\text{Soit } \alpha < 0, \quad 0 < a < 1 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = 0$$

$$\text{Soit } \alpha > 0, \quad b > 1 \qquad \lim_{x \to 0} x^\alpha \log_b x = 0$$

3.2 Méthodes

1. *Limites* :
   - ↪ Connaître les FI « $\dfrac{0}{0}$ »,« $\dfrac{\infty}{\infty}$ »,« $+\infty - \infty$ »,« $0 \times \infty$ » et les lever grâce à une factorisation en vue de faire apparaître des formules usuelles(croissances comparées et autres), ou une réduction au même dénominateur par exemple.
   - ↪ Dans le cas d'une composition de limites, rédiger en posant X=...

2. *Déterminer l'intersection de deux courbes C_f et C_g*
   - ↪ On est amené à résoudre $f(x) = g(x)$ après avoir rédigé :

$$\mathrm{I}(x,y) = C_f \cap C_g \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$$

3. *Résoudre une équation*
   - $\hookrightarrow$ Factoriser après avoir tout « passé à gauche »car un produit de facteurs est nul si l'un des facteurs est nul.
   - $\hookrightarrow$ Une équation de type $e^X = e^Y$ équivaut à $X = Y$ car la fonction ln est bijective.
   - $\hookrightarrow$ Une équation de type $e^X = a$ (avec a>0) équivaut à $X = \ln a$ car la fonction ln est bijective.
   - $\hookrightarrow$ Une équation de type $\ln X = \ln Y$ équivaut à $X = Y$ (*après avoir déterminé l'ensemble sur lequel X et Y sont strictement positifs*) car la fonction exp est bijective.
   - $\hookrightarrow$ Une équation de type $\ln X = a$ équivaut à $X = \exp a$ (*après avoir déterminé l'ensemble sur lequel X est strictement positif*) car la fonction exp est bijective.

4. *Résoudre une inéquation*
   - $\hookrightarrow$ Factoriser après avoir tout « passé à gauche »et faire un tableau de signes.
   - $\hookrightarrow$ Une équation de type $e^X < e^Y$ équivaut à $X < Y$ car la fonction ln est strictement croissante.
   - $\hookrightarrow$ Une équation de type $e^X < a$ (avec a>0) équivaut à $X < \ln a$ car la fonction ln est strictement croissante.
   - $\hookrightarrow$ Une équation de type $e^X < a$ avec a<0 n'a pas de solution.
   - $\hookrightarrow$ Une équation de type $\ln X < \ln Y$ équivaut à $X < Y$ (*après avoir déterminé l'ensemble sur lequel X et Y sont strictement positifs*) car la fonction exp est strictement croissante.
   - $\hookrightarrow$ Une équation de type $\ln X < a$ équivaut à $X < \exp a$ (*après avoir déterminé l'ensemble sur lequel X est strictement positif*) car la fonction exp est strictement croissante.

3.3 Exercices

Exercice 3.1 (*) :(solution ►)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-|x|}$

1. Vérifier que f est impaire.
2. Calculer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$
3. Etudier les variations de f

Exercice 3.2 (*) :(solution ►)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1-x)\mathrm{e}^{3x}$.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2. Démontrer que, pour tout réel x, $f'(x) = (2-3x)\mathrm{e}^{3x}$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$.
4. Établir le tableau de variations de f.
5. On note $\mathrm{I} = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$

   Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $\mathrm{I} = \dfrac{\mathrm{e}^3 - 7\mathrm{e}^{-3}}{9}$.

Exercice 3.3 (**) :(solution ►)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[(x + (1 - x)e^{2x}\right].$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal (unité graphique 2 cm)

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$.
3. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 1 + (1 - 2x)e^{2x}$.
   (a) Étudier le sens de variation de u.
   Montrer que l'équation $u(x) = 0$ possède une solution unique α dans l'intervalle $[0\ ,\ 1]$.
   (b) Déterminer le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x.
4. Étudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variations.

Exercice 3.4 (**) :(solution ►)

On considère la fonction f définie par $f : x \mapsto \dfrac{x}{\ln x}$.

1. Expliciter le domaine de définition de f.
2. Calculer la limite $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. Qu'en déduit-on sur f ?
3. Justifier la dérivabilité de f sur son domaine de définition et expliciter sa dérivée.
4. Donner le sens de variations de f sur son domaine de définition.
5. Montrer que f réalise une bijection de $]e, +\infty[$ sur $]e, +\infty[$.

Chapitre 4

Limite-Continuité

4.1 Résumé de cours

1. **Généralités sur les fonctions**
   - f définie sur I est **paire** si et seulement si $\forall x \in I, -x \in I$ et $f(-x) = f(x)$
     f définie sur I est **impaire** si et seulement si $\forall x \in I, -x \in I$ et $f(-x) = -f(x)$
   - On dit que $f \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R})$ est majorée s'il existe un réel M tel que $\forall x \in I, f(x) \leq M$
   - On dit que $f \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R})$ est minorée s'il existe un réel m tel que $\forall x \in I, f(x) \geq M$
2. **Limite-Continuité en un point**
   - En un réel : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in I,\ |x-a| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$
   - En $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists A \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in I,\ x \geq A \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$
   - En $-\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists A \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in I,\ x \leq A \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$
   - Si $f(x) \xrightarrow{x\to a} \ell$, alors ℓ est unique.
   - On dit que f est *continue en a* $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ ce qui signifie donc que :
     $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in I \quad |x-a| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$
   - Soit $a \in \overline{I}$. Une fonction non définie en a est prolongeable par continuité en a si elle admet une limite réelle en a.
     Son *prolongement par continuité* est la fonction g définie par $\begin{cases} \forall x \in I \quad g(x) = f(x) \\ g(x) = \ell \end{cases}$
   - En un réel : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall B \in \mathbb{R}, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in I,\ |x-a| \leq \alpha \Rightarrow f(x) \geq B$
   - En $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall B \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in I,\ x \geq A \Rightarrow f(x) \geq B$
   - Théorèmes de comparaison :
     — Si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ et pour x suffisamment grand $f(x) \geq g(x)$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
     — Si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ et pour x suffisamment grand $f(x) \leq g(x)$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$
     — Si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \ell$ et pour x suffisamment grand $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$
   - Composition :
     — Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x\to l} g(x) = \ell'$ alors $\lim\limits_{x\to a} g \circ f(x) = \ell'$

— Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell$

- Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit a un réel appartenant à I.
  f est *continue* en a si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$
- f est *continue sur un intervalle* I si f est définie sur I et f est continue en tout point de I.
- Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.
- La fonction racine carrée est continue sur $[0;+\infty[$.
- Les fonctions rationnelles sont continues sur l'ensemble sur lequel elles sont définies.
- L'addition,la multiplication, la division,la composition de ces fonctions sont continues sur tout intervalle où elles sont définies.
- *Th de la limite monotone* :
  Soit $f :]u,v[\to \mathbb{R}$ croissante.
  (a) f admet une limite à gauche en tout point de $]u,v]$
  (b) $\forall (a,b) \in I^2, a < b \Rightarrow \lim\limits_{a^-} f \le f(a) \le \lim\limits_{a^+} f \le \lim\limits_{b^-} f \le f(b) \le \lim\limits_{b^+} f$
  (c) si $a \in]u,v[$ les limites à gauche et à droite sont finies.
  (d) si f n'est pas majorée alors $\lim\limits_{v} f = +\infty$
- Soit (u_n) une suite convergente vers un réel ℓ et soit f une fonction continue en ℓ alors la suite $f(u_n)$ converge vers $f(\ell)$.

3. **Continuité sur un intervalle**
   - si $f \in \mathscr{C}(I)$ et $f \neq 0$ sur I alors $\dfrac{1}{f} \in \mathscr{C}(I)$
   - si $f \in \mathscr{C}(I)$ alors $|f| \in \mathscr{C}(I)$ d'où $\sup(f,g) \in \mathscr{C}(I)$ et $\inf(f,g) \in \mathscr{C}(I)$
   - si $f \in \mathscr{C}(I)$ et $g \in \mathscr{C}(J)$ avec $f(I) \subset J$ alors $g \circ f \in \mathscr{C}(I)$
   - si $J \subset I$ et $f \in \mathscr{C}(I)$ alors f restreinte à J notée $f|_J$ appartient à $\mathscr{C}(J)$

   - **Théorème des valeurs intermédiaires** :
     Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I . Soient a et b deux réels appartenant à I.
     Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.
   - Soit f continue sur I telle que f ne s'annule pas sur I. ALors f garde un signe constant sur I.
   - Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $[a,b]$.
     Alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans l'intervalle $[a,b]$.
   - Soit f une fonction continue strictement monotone sur l'intervalle I ; on note $J = f(I)$.
     (a) alors f définit une bijection de I dans $J = f(I)$
     (b) et sa réciproque $f^{-1} : J \to I$ bijective strictement monotone (de même sens que f).
     (c) sa réciproque $f^{-1} : J \to I$ est continue.

4.2 Méthodes

1. *Démontrer que f est bijective sur I*
   ↪ On utilise le théorème :
   Si f est continue sur I , strictement monotone sur I alors f réamise une bijection de I sur $J = f(I)$.
   On trouve J grâce au tableau de variation et/ou les limites.
   ↪ On demande aussi souvent les propriétés de la bijection réciproque :
   f^{-1} est continue et de même monotonie que f.

2. *Démontrer que l'équation $f(x)=\ell$ admet une unique solution*

$\hookrightarrow$ On utilise le théorème consistant à montrer que :
   - f est dérivable sur $[a;b]$
   - f est strictement monotone sur $[a;b]$
   - $\ell \in f([a;b])$

   Alors l'équation $f(x)=\ell$ admet une unique solution sur $[a;b]$

3. *Etudier la continuité d'une fonction*

   2 cas de figure:

   $\hookrightarrow$ Pour montrer que f est continue en a il faut montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x) = f(a)$ (l'une des deux limites suffisant parfois selon la définition de f).

   $\hookrightarrow$ Pour montrer que f est continue sur un intervalle I on utilise la décomposition de f à l'aide de fonctions usuelles et les opérations sur les fonctions continues.

4. *Prolonger une fonction par continuité* Dans la cas où f **n'est pas définie** en a.

   $\hookrightarrow$ Pour montrer que f est prolongeable par continuité en a il faut montrer que $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe et est finie (l'une des deux limites $x>a$ ou $x<a$ suffisant parfois selon la définition de f).

4.3 Exercices

Exercice 4.1 (*) :(solution ►)

Soit f la fonction définie sur $]-2;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^2+2x+3}{x+2}$

1. Calculer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$
2. Déterminer 3 réels a,b,c tels que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]-2;+\infty[$, $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+2}$
3. En déduire la position de $\mathscr{C}$ courbe représentative de f par rapport à $\mathscr{D}$ d'équation $y=x$

Exercice 4.2 (*) :(solution ►)

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\begin{cases} x^2+2 \text{ si } x\leq 0\\ x+2 \text{ si } x>0\end{cases}$

Démontrer que f est continue en 0.

Exercice 4.3 (*) :(solution ►)

Représentez graphiquement les fonctions suivantes (sur des graphiques distincts) puis étudier la continuité de chacune de ces fonctions.

$$e : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si} & x<-1\\ x+1 & \text{si} & -1\leqslant x\leqslant 2\\ 3 & \text{si} & x>2\end{cases} \qquad f : x \mapsto \begin{cases} x^2 & \text{si} & x\leqslant 0\\ x\ln x & \text{si} & 0<x<1\\ 1/x & \text{si} & x\geqslant 1\end{cases}$$

Exercice 4.4 (**) :(solution ►)

On considère la fonction $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par : $f(x)=\dfrac{x^3+6x+1}{9}$

et l'on définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ en posant : $u_0=0$ et $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}=f(u_n)=\dfrac{(u_n)^3+6u_n+1}{9}$.

1. Montrer que l'équation $x^3-3x+1=0$ possède une solution unique α sur l'intervalle $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$.
2. Montrer que l'équation $f(x)=x$ est équivalente à l'équation $x^3-3x+1=0$.

   En déduire que α est l'unique solution de l'équation $f(x)=x$ dans l'intervalle $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$.
3. Montrer que $\forall x\in[0,\alpha]\,,\quad x\leqslant f(x)$.
4. Montrer, par récurrence, que $\forall n\in\mathbb{N},\quad 0\leqslant u_n\leqslant\alpha$.
5. A l'aide de la question 3, donner la monotonie de la suite u.
6. En déduire que la suite $(u_n)_n$ converge et justifier que sa limite est α.

Chapitre 5

Probabilités

5.1 Résumé de cours

1. **Dénombrement**. Soit E un ensemble à n éléments.
   - $\operatorname{card}(\mathscr{P}(E)) = 2^n$
   - Une permutation de E est une bijection de E dans lui même. Si card $E = n$, le nombre de permutations de E est $n!$.
   - Une p-combinaison de E est une partie F de E telle que $\operatorname{card}(F) = p$.Le nombre de ces p-combinaisons se note $\binom{n}{p}$.

     Si $0 \leq p \leq n$, alors $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!}$ et $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

     Si $1 \leq p \leq n-1$, alors $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$.

2. **Vocabulaire des événements** :
   (a) L'évènement A et B est représenté par $A \cap B$
   (b) L'évènement A ou B est représenté par $A \cup B$
   (c) Dire que deux évènements A et B sont incompatibles signifie que $A \cap B = \varnothing$

3. **Tribu** :
   Soit Ω un ensemble fini et $\mathscr{A}$ une partie de $\mathscr{P}(\Omega)$ autrement dit $\mathscr{A}$ est un ensemble d'événements. Dire que $\mathscr{A}$ est une tribu (ou σ-algèbre) de Ω signifie que
   (a) L'événement certain appartient à $\mathscr{A}$,
   (b) Si un événement appartient à $\mathscr{A}$, son contraire aussi.
   (c) Les réunions d'événements de $\mathscr{A}$ appartiennent à $\mathscr{A}$.

   Dans ce cas, on dit que le couple $(\Omega, \mathscr{A})$ est un espace probabilisable.

   Si Ω est un ensemble fini alors $\mathscr{P}(\Omega)$ est une tribu de Ω et les singletons $\{\omega\}$ $(\omega \in \Omega)$ sont appelés les événements élémentaires.

4. **Probabilité** :
   Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable. On appelle probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$ toute application P de $\mathscr{A}$ dans $[0;1]$ telle que

$$P(\Omega) = 1$$

$$\text{et } \forall A, B \in \mathscr{A} \text{ tels que } A \cap B = \varnothing, \text{ on a } P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

   Le triplet $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ est appelé espace probabilisé fini et $\forall A \in \mathscr{A}$, $P(A)$ s'appelle la probabilité de A.

5. **Calcul des probabilités** :

   Soient A, B deux évènements. Alors on a :

   (a) $P(\varnothing) = 0$

   (b) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

   (c) Si $A \subset B$ alors $P(A) \leqslant P(B)$

6. **Crible de Poincaré** :

   — $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

   — $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

   — $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \cdots + P(A_n) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - \cdots - P(A_1 \cap A_n) - \cdots - P(A_2 \cap A_3) - \cdots - P(A_2 \cap A_n) - \cdots - P(A_{n-1} \cap A_n) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \cdots + P(A_1 \cap A_2 \cap A_n) + P(A_1 \cap A_3 \cap A_4) + \cdots + P(A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_n)$

7. **Probabilité conditionnelle** :

   Soit A un évènement de probabilité non-nulle.
   La probabilité conditionnelle relativement à A ou probabilité sachant A de B vaut :

$$P_A(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

8. Règles de calcul :

   (a) $P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B)$

   (b) La formule du crible de Poincaré reste vraie en remplaçant P par P_A.

   (c) Formule de Bayes
   Soit A et B deux événements de probabilités non nulles, alors on a

$$P_B(A) = P_A(B) \frac{P(A)}{P(B)}$$

9. **Indépendance** :

   Dire que deux évènements A et B de probabilités non nulles sont indépendants signifie que

$$P_A(B) = P(B) \text{ ou } P_B(A) = P(A)$$

10. **Indépendance mutuelle** :

   - On dit que les évènements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont mutuellement indépendants si pour toute partie $J \subset [\![1, n]\!]$,

$$P\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) = \prod_{i \in J} P(A_i)$$

   - On dit que les évènements $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ sont mutuellement indépendants si pour toute partie $I \subset \mathbb{N}^*$,

$$P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i)$$

11. **Probabilités composéesProbabilités !composées** :

   (a) Pour 2 événements

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) \text{ si } P(A) \neq 0$$

   (b) Pour 3 événements

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P_A(B) \times P_{A \cap B}(C) \text{ si } P(A \cap B) \neq 0$$

(c) Pour n événements, $n \geq 2$
Soient $A_1, .., A_n$ une famille d'évènements telle que $P(A_1 \cap A_2 \cap .. \cap A_{n-1}) \neq 0$. Alors on a

$$P(A_1 \cap A_2 \cap .. \cap A_n) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \cdots \times P_{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

(d) Cas particulier des événements mutuellement indépendants

$$P(A_1 \cap A_2 \cap .. \cap A_n) = P(A_1) \times P(A_2) \times P(A_3) \cdots \times P(A_n)$$

12. **Système complet d'événements** :

Dire qu'une famille d'événements est un système complet d'événements ou une partition de l'univers signfie que ces événements sont incompatibles deux à deux et que leur réunion forme l'univers tout entier.

13. **Formule des probabilités totales** :

(a) Pour 2 événements
A et $\overline{A}$ forment un S.C.E. donc

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A}) = P_A(B)P(A) + P_{\overline{A}}(B)P(\overline{A})$$

(b) Pour 3 événements
F, G, H forment un S.C.E. donc

$$P(B) = P(B \cap F) + P(B \cap G) + P(B \cap H) = P_F(B)P(F) + P_G(B)P(G) + P_H(B)P(H)$$

(c) Pour n événements
Soit $\{A_1, .., A_n\}$ un S.C.E. donc

$$P(B) = P(B \cap A_1) + \cdots + P(B \cap A_n) = P_{A_1}(B)P(A_1) + \cdots + P_{A_n}(B)P(A_n)$$

ou encore $P(B) = \sum_{k=1}^{n} P_{A_k}(B)P(A_k)$ si $P(A_k) \neq 0$

(d) Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ un système complet d'évènements d'un espace probabilisé. Pour tout évènement B on a :

$$P(B) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(B \cap A_k)$$

si de plus pour tout $n \in \mathbb{N}^*, P(A_n) \neq 0$ alors $P(B) = \sum_{k=1}^{+\infty} P_{A_k}(B)P(A_k)$

14. **Théorème de la limite monotone** (et conséquences) :

- Pour toute suite croissante (A_n) d'évènements, $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \to +\infty} P(A_n)$
- Pour toute suite décroissante (A_n) d'évènements, $P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \to +\infty} P(A_n)$
- Pour toute suite (A_n) , $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \to +\infty} P\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_n\right)$
- Pour toute suite (A_n) , $P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \to +\infty} P\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_n\right)$

5.2 Méthodes

1. *Déterminer une probablité conditionnelle* :

   Il faut savoir faire la différence par lecture de l'énoncé entre la possibilité de **donner** la probabilité conditionnelle demandée et le fait de devoir la calculer.

   Ne confondez pas $P(A \cap B)$ et $P_A(B)$. Quand on calcule la proba conditionnelle $P_A(B)$, l'événement A est supposé réalisé, sa probabilité ne doit donc pas apparaitre dans le calcul.

2. *Calculer une probablité conditionnelle* :

   Ici on demande de faire le calcul donc on utilise la formule $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

3. *Calculer la probabilité d'une intersection* :

   On utilise la formule $P(A \cap B) = P_B(A).P(B)$ ou $= P_A(B).P(A)$ selon les besoins.

   On peut aussi avoir $P(A \cap B) = P(A).P(B)$ si l'énoncé précise que les évènements sont indépendants.

4. *Calculer la probabilité d'un évènement* :

   ↪ Si cette question intervient au début d'un énoncé cela veut dire qu'on dénombre directement et on utilise $\dfrac{card A}{card \Omega}$.

   ↪ Si cette question intervient après des calculs de probabilités d'intersections d'évènements alors on utilise les systèmes complets d'évènements(ensemble d'évènements deux à deux incompatibles dont la réunion est Ω) :

   avec $(B, \overline{B})$ cela donne $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) = P_B(A).P(B) + P_{\overline{B}}(A).P(\overline{B})$

   ou plus généralement avec le système complet d'évènements $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ cela donne

   $P(A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(B_k \cap A) = \sum_{k=0}^{+\infty} P_{B_k}(A).P(B_k)$

5. *Comment montrer que deux évènements sont indépendants* :

   Il faut montrer par calcul que $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

6. *Comment utiliser la fait que deux évènements sont indépendants* :

   Cela simplifie l'utilisation de la formule des probabilités totales :

   $P(A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(B_k \cap A) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(A).P(B_k)$

7. *Comment utiliser la fait que deux évènements sont incompatibles ou disjoints* :

   Il ne faut pas confondre cette notion avec la précédente ; la notion d'évènements disjoints se justifie par la logique de l'expérience et des évènements utilisés (par exemple dans un lancer de dé les évènements obtenir un 5 et obtenir un 6 sont deux évènements clairement disjoints puisque les deux ne peuvent pas se réaliser en même temps).

   Dans ce cas on aura $P(A \cap B) = 0$ ce qui permet de simplifier $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

   Rappelons que si rien n'est précisé , on a en général $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

8. *Chercher une probabilité $P(A_{n+1})$ en fonction de $P(A_n)$* :

Après avoir traduit l'énoncé sous forme de probas conditionnelles, la première étape sera systématiquement une application de la formule des probabilités totales : on utilise le système complet d'évènements correspondant à l'expérience à l'instant n puis on utilise la formule des probabilité totales.

9. *Utiliser la formule de Bayes* : Si vous inversez toujours le $P(A)$ et $P(B)$ dans la formule de Bayes, pensez qu'au numérateur, les deux probabilités qu'on multiplie ne concernent jamais le même événement : si votre probabilité conditionnelle est $P_A(B)$, vous ne pouvez pas la multiplier par $P(B)$, c'est donc $P(A)$ qui sera au numérateur, et $P(B)$ au dénominateur.

5.3 Exercices

Exercice 5.1 (**) :(solution ►)

1. Une urne contient 2 boules noires et 3 boules blanches. On tire simultanément 2 boules de l'urne.
   — Quelle est la probabilité d'obtenir ainsi 2 boules noires ? une seule boule noire ? aucune boule noire ?
2. Une urne contient 1 boule noire et 4 boules blanches. On tire simultanément 2 boules de l'urne.
   — Quelle est la probabilité d'obtenir ainsi 1 boules noires ? aucune boule noire ?
3. On dispose d'une urne U_0 contenant 2 boules noires et trois boules blanches, et de n urnes $U_1, U_2, \dots, U_n$ chacune contenant 3 boules blanches . On tire simultanément 2 boules de l'urne U_0, on les place dans l'urne U_1. De l'urne U_1 contenant alors 5 boules, on tire simultanément 2 boules et on les place dans U_2 .... Et ainsi de suite jusqu'à la $n^{ème}$ urne.

   On note
   — A_k : " l'urne U_k contient aucune boule noire après avoir placer les deux boules provenant de U_{k-1} et avant de sélectionner de nouveau deux boules "
   — B_k : " l'urne U_k contient une seule boule noire après avoir placer les deux boules provenant de U_{k-1} et avant de sélectionner de nouveau deux boules "
   — C_k : " l'urne U_k contient deux boules noires après avoir placer les deux boules provenant de U_{k-1} et avant de sélectionner de nouveau deux boules "

   (a) Calculer $p(A_1), P(B_1)$ et $P(C_1)$.
   (b) Calculer $P(A_2), P(B_2)$ $P(C_2)$.
   (c) Pour k entier naturel non nul, décrire l'événement (C_k) et en déduire que $P(C_k) = \dfrac{1}{10^k}$.
   (d) Pour k entier naturel non nul, montrer que $P(B_{k+1}) = \dfrac{6}{10}P(C_k) + \dfrac{4}{10}P(B_k)$.
   (e) Montrer par récurrence que, pour n entier naturel non nul, on a :
   $$P(B_n) = 2 \times (\frac{4}{10})^n - \frac{2}{10^n}.$$

Exercice 5.2 (**) :(solution ►)

Un employé se rend à son travail. S'il est à l'heure il prend le bus de ramassage gratuit mis à disposition par l'entreprise, s'il est en retard il prend le bus de la ville et il lui en coûte 1,50 euro.

Si l'employé est à l'heure un jour donné, la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est $\dfrac{1}{5}$, s'il est en retard un jour donné la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est $\dfrac{1}{20}$.

Pour tout entier naturel non nul n, on appelle R_n l'évènement : « l'employé est en retard le jour n ». On note p_n, la probabilité de R_n et q_n, celle de $\overline{R_n}$. On suppose que $p_1 = 0$.

1. Détermination d'une relation de récurrence.
   (a) Déterminer les probabilités conditionnelles $p_{R_n}(R_{n+1})$ et $p_{\overline{R_n}}(R_{n+1})$.
   (b) Déterminer $p(R_{n+1} \cap R_n)$ en fonction de p_n et $p\left(R_{n+1} \cap \overline{R_n}\right)$ en fonction de q_n
   (c) Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n et de q_n.
   (d) En déduire que $p_{n+1} = \dfrac{1}{5} - \dfrac{3}{20}p_n$.
2. Étude de la suite $\left(p_n\right)$.
   Pour tout entier naturel non nul n, on pose $v_n = p_n - \dfrac{4}{23}$.
   (a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $-\dfrac{3}{20}$.
   (b) Exprimer v_n puis p_n en fonction de n.
   (c) Justifier que la suite $\left(p_n\right)$ est convergente et calculer sa limite.

Chapitre 6

Dérivabilité

6.1 Résumé de cours

1. **Dérivation en un point**
   - Soit $f \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R})$. Soit $a \neq \inf I$ (respectivement $a \neq \sup I$).
     f est dérivable en a si et seulement si $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite finie quand x tend vers a. C'est le *nombre dérivé* de f en a ; il est noté $f'(a)$.

   - Supposons a intérieur à I. La fonction f est dérivable à *droite* en a si et seulement si $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite finie quand x tend vers $a$par valeurs supérieures ; cette limite est alors dite dérivée à droite de f en a et se note $f'_d(a)$.
     La fonction f est dérivable à *gauche* en a si et seulement si $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite finie quand x tend vers a par valeurs inférieures ; cette limite est alors dite dérivée à gauche de f en a et se note $f'_g(a)$.

   - Si a est borne supérieure(respectivement inférieure) de I alors f est dérivable en a si et seulement si elle est dérivable à gauche(respectivement à droite) en a.

   - Si f est dérivable en a, alors elle est continue en a.

   - On dit que f définie sur I présente un maximum(respectivement minimum) <u>local</u> si et seulement si $f(x) \leq f(a)$ (respectivement $f(x) \geq f(a)$) pour x voisin de a.
     On dit que f définie sur I présente un maximum(respectivement minimum) <u>global</u> si et seulement si $\forall x \in I, f(x) \leq f(a)$ (respectivement $f(x) \geq f(a)$).

   - *Th de l'extremum* : Soit f définie sur I. Soit $a \in I$ tel que a ne soit pas borne de I.
     Si f est dérivable en a et admet un extremum local en a alors $f'(a) = 0$

2. **Opérations**
   - $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur I si et seulement si elle est dérivable en tout point de I.
     $f : I \to \mathbb{R}$ est de classe C^1 sur I si et seulement si elle est dérivable en tout point de I et sa dérivée est continue sur I.
   - Si les fonctions f et g sont dérivables en a, alors
     — $\lambda f + \mu g$ l'est aussi si $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et

$$(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a)$$

— $f \times g$ l'est aussi et

$$(f \times g)'(a) = f'(a) \times g(a) + f(a) \times g'(a)$$

- Si les fonctions f et g sont dérivables sur I, alors $\lambda f + \mu g$ et fg le sont aussi.

- Si la fonction f est dérivable en a et si n est un entier naturel non nul , alors f^n est dérivable en a et

$$(f^n)'(a) = nf^{n-1}(a)f'(a)$$

- Si f et g sont dérivables en a et si $g(a) \neq 0$, alors
  - $\dfrac{1}{g}$ l'est aussi et

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{-g'(a)}{\big(g(a)\big)^2}$$

  - $\dfrac{f}{g}$ l'est aussi et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \times g(a) - f(a) \times g'(a)}{\big(g(a)\big)^2}$$

- Soient f dérivable en a et g dérivable en $b = f(a)$.
  Alors $g \circ f$ est dérivable en a et

$$(g \circ f)'(a) = g'(b) \times f'(a)$$

- Soit f une fonction continue et strictement monotone de I sur $J = f(I)$, dérivable en $a \in 8$.
  Alors si $f'(a) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ et

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

- Si f est paire alors f' est impaire.
  Si f est impaire alors f' est paire.

3. **Dérivées successives**
   - Soit $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
     La *dérivée n-iéme* de f se note $f^{(n)}$, Elle se définit par récurrence, avec :
     $f^{(0)} = f$ et $\forall n \in \mathbb{N},\quad f^{(n)} = \left(f^{(n)}\right)'$
     Si $f^{(n)}$ existe, on dit que f est n fois dérivable.
   - Si la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est n fois dérivable et si, de plus, sa dérivée n-ième $f^{(n)}$ est continue, on dit que f est de *classe* $\mathscr{C}^n$ sur I.
     En particulier, une fonction de *classe* $\mathscr{C}^0$ est une fonction continue.

   - f est dite de classe $\mathscr{C}^\infty$ si et seulement si elle est de classe C^k pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$; noter que toutes ses dérivées sont alors continues.

   - Si f et g sont n fois dérivables et si $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, alors
     $(\lambda f + \mu g)$ est n fois dérivable et $(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}$.

   - *formule de Leibniz* : Si f et g sont n fois dérivables, alors fg est n fois dérivable et

$$\boxed{(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}}$$

- Si f et g sont de classe C^n sur I et g ne s'annule pas sur I alors $\dfrac{f}{g}$ est de classe C^n sur I.
  Si f est de classe C^n sur I et g de classe C^n sur $J \subset f(I)$ alors gof est de classe C^n sur I.

4. **Dérivabilité sur un intervalle**
   - *Th de Rolle* : Soit f une fonction à valeurs <u>réelles</u> continue sur le <u>segment</u> $[a, b]$ et dérivable sur l'<u>ouvert</u> $]a, b[$.
     Si $f(a) = f(b)$, alors $\quad \exists c \in]a, b[\quad f'(c) = 0$.

   - *égalité des accroissements finis* : Soit f une fonction à valeurs <u>réelles</u> continue sur le <u>segment</u> $[a, b]$ et dérivable sur l'<u>ouvert</u> $]a, b[$.
     $$\exists c \in]a, b[\quad f(b) - f(a) = (b-a) f'(c).$$
   - *inégalité des accroissements finis* : Soit f une fonction à valeurs réelles continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ avec $a < b$
     Si $\exists m \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in]a, b[, \quad m \leq f'(x) \leq M$ alors
     $$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$$
   - Soit f une fonction à valeurs réelles continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ avec $a < b$
     Si $\exists k \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in]a, b[, \quad |f'(x)| \leq k$ alors $\forall x \in]a, b[, \forall y \in]a, b[, \quad |f(y) - f(x)| \leq k|y - x|$
   - Soit f une fonction à valeurs réelles continue sur l'intervalle I, dérivable sur l'intérieur de I ; alors
     f est croissante sur I si et seulement si sa dérivée est positive sur l'intérieur de I
     f est décroissante sur I si et seulement si sa dérivée est négative sur l'intérieur de I
     f est constante sur I si et seulement si sa dérivée est nulle sur l'intérieur de I

   - Une fonction $f \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R})$ est convexe si et seulement si
     $$\forall (a, b) \in I^2 \quad \forall t \in [0, 1] \quad f(ta + (1-t)b) \leq t f(a) + (1-t) f(b)$$
   - Si f est de classe C^1 sur I, f est convexe si et seulement si f' est croissante.
   - Si f est de classe C^1 sur I, f est convexe si et seulement si la courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes.
   - Une fonction f de classe C^2 sur I est convexe si et seulement si $f'' > 0$ sur I.

5. Formules de dérivées :

D_f	Fonction $f(x)$	$D_{f'}$	Dérivée $f'(x)$	Remarque
$\mathbb{R}$	k	$\mathbb{R}$	0	$k \in \mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	x	$\mathbb{R}$	1	
$\mathbb{R}$	x^2	$\mathbb{R}$	$2x$	
$\mathbb{R}_+$	$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	
$\mathbb{R}^*$	$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$-\dfrac{1}{x^2}$	
$\mathbb{R}$	x^n	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{N}$
$\mathbb{R}^*$	$\dfrac{1}{x^n}$	$\mathbb{R}^*$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$n \in \mathbb{N}$
$\mathbb{R}_+$	$\sqrt[n]{x}$	$\mathbb{R}_+^*$	$\dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$n \in \mathbb{N}$
$\mathbb{R}_+$	x^α	$\mathbb{R}_+$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\alpha \geq 1$
$\mathbb{R}_+$	x^α	$\mathbb{R}_+^*$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$0 < \alpha < 1$
$\mathbb{R}_+^*$	x^α	$\mathbb{R}_+^*$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\alpha < 0$
$\mathbb{R}^*$	$\ln\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}^*$	$\dfrac{1}{x}$	
$\mathbb{R}^*$	$\log_a\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}^*$	$\dfrac{1}{x\ln a}$	$a > 0$
$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$	e^x	
$\mathbb{R}$	a^x	$\mathbb{R}$	$a^x \ln a$	$a > 0$

Opérations sur les dérivées :

$(\alpha f)' = \alpha f'$

$(f+g)' = f' + g'$

$(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'$.

$(fg)' = f'g + fg'$.

$\left(\dfrac{1}{g}\right)' = \dfrac{-g'}{g^2}$.

$\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$.

Soit f une fonction dérivable et strictement monotone de l'intervalle I sur l'intervalle $J = f(I)$. Si f' ne s'annule par sur I alors la fonction f^{-1} est dérivable sur J et $\left(f^{-1}\right)' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

6.2 Méthodes

1. *Etudier le sens de variation d'une fonction*
   ↪ Calculer la dérivée, étudier son signe en réduisant au même dénominateur et factorisant au maximum en repérant ensuite les termes de signe constant et on écrit par exemple:« $x^2 > 0$ sur l'intervalle I donc $f'(x)$ est du signe de ... »
   ↪ On peut aussi faire apparaitre dans la dérivée une fonction qu'on a déjà étudié dans une question précédente et pour laquelle on connait le signe.

2. *Déterminer le signe d'une fonction*
   ↪ Par calcul : on factorise et on étudie le signe de chacun des facteurs qu'on consigne dans un tableau de signes.
   ↪ Par utilisation du tableau de variation de cette fonction dans laquelle peut figurer un maximum ou un minimum qui permet de conclure par lecture des variations.
   ↪ Par utilisation du tableau de variation il peut aussi ne pas y avoir d'extremum mais une valeur d'un réel x telle que $f(x) = 0$ et qui partage donc l'intervalle d'étude en deux parties ; l'une sur laquelle $f(x)$ sera négatif et l'autre sur laquelle $f(x)$ sera positif.

3. *Tangente*
   ↪ On applique l'équation : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$
   ↪ Il se peut qu'on ne demande que le coefficient directeur de la tangente auquel cas on n'écrira que : $f'(a)$.
   ↪ On demande aussi souvent de déterminer la position de la courbe par rapport à la tangente : on étudie le signe de $f(x) - y$ comme dans la méthode vue pour les asymptotes obliques.

4. Dérivée de la réciproque :
   Si f est dérivable alors f^{-1} est dérivable en tout $b = f(a)$ tel que $f'(a) \neq 0$ et $(f^{-1})(b) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)}$

5. *Etudier la dérivabilité d'une fonction*
   2 cas de figure:
   ↪ Pour montrer que f est dérivable en a il faut montrer que
   $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = l$ (l'une des deux limites suffisant parfois selon la définition de f) et l est alors le nombre dérivé $f'(a)$ de f en a.
   Si la limite n'existe pas f n'est pas dérivable en a.
   Si la limite est infinie f n'est pas dérivable en a et la courbe représentative de f admet une tangente verticale au point d'abscisse a.
   ↪ Pour montrer que f est dérivable sur un intervalle I on utilise la décomposition de f à l'aide de fonctions usuelles et les opérations sur les fonctions dérivables.

6. *Montrer qu'une fonction est de classe C^1 sur un intervalle*
   2 cas de figure:

- ↪ Pour montrer que f est de classe C^1 sur un intervalle I on utilise la décomposition de f à l'aide de fonctions usuelles et les opérations sur les fonctions de classe C^1 .
- ↪ On peut penser aussi à utiliser le théorème da limite de la dérivée qui affirme que si f est continue sur $[a,b]$, de classe C^1 sur $]a,b]$ et si f' admet une limite finie en a^+ alors f est de classe C^1 sur $[a,b]$. On remarquera qu'alors f est dérivable en a et on a donc ainsi une autre méthode pour obtenir la dérivabilité de f en a et la valeur de $f'(a)$.
- ↪ On doit retenir enfin l'ordre suivant : si f est de classe C^1 alors f est dérivable, alors f est continue.

7. *Montrer qu'une fonction est convexe*

- ↪ Si f est de classe C^2 sur I et $\forall x \in I, f''(x) \geq 0$ alors f est convexe sur I
- ↪ Si f est de classe C^2 sur I et $\forall x \in I, f''(x) \leq 0$ alors f est concave sur I

8. *Déterminer les points d'inflexion*

- ↪ Si f est de classe C^2 sur I on résout l'équation $f''(x) = 0$ pour trouve les abscisses des points d'inflexion.
- ↪ Il faut savoir qu'en un tel point la courbe change pour passer de concave à convexe ou inversement et que la tangente traverse la courbe.

6.3 Exercices

Exercice 6.1 (**) :(solution ►)
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(0) & = & 1 \\ f(x) & = & \dfrac{1}{2}x^2(3-2\ln x)+1 \quad \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

1. (a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Que peut-on en déduire pour la fonction f ?
   (b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. (a) Étudier la dérivabilité de f en 0.
   (b) Montrer que f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour $x>0$, f' désignant la fonction dérivée de f.
3. Étudier le sens de variations de f sur $[0\,;\,+\infty[$, puis dresser son tableau de variations.
4. Montrer que l'équation $f(x)=0$ possède une solution unique α sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$. Déterminer une valeur approchée décimale de α à 10^{-2} près.

Exercice 6.2 (***) :(solution ►)
Soit u la suite définie par la donnée de $u_0 = 1$ et de la relation $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{1}{2(1+u_n^2)}$

On pose $f(x) = \dfrac{1}{2(1+x^2)}$.

1. Etudier les variations de f sur $[0;1]$ et montrer que pour tout entier naturel n , $u_n \in [0;1]$
2. On pose $g(x) = 2x^3+2x-1$. Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution $\alpha \in [0;1]$.
3. Démontrer que l'équation $f(x)=x$ est équivalente à l'équation $g(x)=0$.
4. Démontrer que pour tout réel x appartenant à $[0;1]$, $|f'(x)| \leq f(x) \leq \dfrac{1}{2}$

5. En déduire que pour tout entier naturel n , $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 |u_0 - \alpha|$

6. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Chapitre 7

Intégration

7.1 Résumé de cours

1. **Intégrale d'une fonction**
   - On appelle intégrale de f continue sur $[\ a\ ;\ b\ ]$ le nombre réel $F(b)-F(a)$ où F est une primitive quelconque de f sur I. Il est noté
   $$\int_a^b f(x)\ dx = F(b)-F(a).$$
   Ainsi $\int_a^x f(x)\mathrm{d}x$ est la seule primitive de f qui s'annule en a.
   - Inégalité de la moyenne : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[\ a\ ;\ b\ ]$.
   S'il existe des réels m, M et k tels que pour tout $x \in [\ a\ ;\ b\ ]$, on ait :
     - $m \leq f(x) \leq M,\quad$ alors $\quad m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\ dx \leq M(b-a).$
     - $|f| \leq k,\quad$ alors $\quad \int_a^b |f(x)|\ dx \leq k(b-a).$
2. **Méthode des rectangles**
   - Une subdivision $\sigma = \{a_k / k \in [\![0;n]\!]\}$ de l'intervalle [a,b] régulière de pas $h = \dfrac{b-a}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ se définit par $\forall k \in [\![0;n]\!], a_k = a+kh$.
   Une somme de Riemann se définit par $S_n(f) = \dfrac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a_k)$.
   - Si f est continue sur $[a,b]$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \int_a^b f(t)dt$
3. **Fonctions continues par morceaux**

   Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$. On dit que f est **continue par morceaux sur** $[a;b]$ si f est continue en tout point de $[a;b]$ sauf en un nombre fini de points, et en ces points f admet une limite finie à gauche et à droite.
4. **Propriétés**
   - Linéarité : Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\int_a^b (f(t)+g(t))dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$ et $\int_a^b \lambda f(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt$
   - Positivité: Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a;b]$, **avec** $a<b$, telle que f est positive sur $[a;b]$. Alors :
   $$\int_a^b f(t)\,dt \geqslant 0$$
   - Croissance: Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a;b]$, **avec** $a<b$, et telles que $\forall t \in [a;b]\ f(t) \leqslant g(t)$. Alors :
   $$\int_a^b f(t)\,dt \leqslant \int_a^b g(t)\,dt$$

- Valeur absolue:
  Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a;b]$, **avec $a<b$**, alors :
  $$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,dt$$
- Inégalité de la moyenne:
  Soient f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ alors
  $$\left|\int_a^b f(t)g(t)dt\right| \leq \sup_{[a,b]}|f|\int_a^b |g(t)|dt$$
  Cas particulier : si $g=1$ cela donne : $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)dt\right| \leq \sup\limits_{[a,b]}|f|(b-a)$
- Relation de Chasles: Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle I et a, b et c trois réels de cet intervalle. Alors :
  $$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$$
- Une fonction f continue et positive sur $[a,b]$ est nulle$\Leftrightarrow \displaystyle\int_{[a,b]} f = 0$

5. **Fonction définie par une intégrale**
   - Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$. Pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[a,b]$, on appelle intégrale fonction de sa borne supérieure l'intégrale $\displaystyle\int_a^x f(t)dt$
   - Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ où f est continue par morceaux sur $[a,b]$. F est continue en tout x de $[a,b]$
   - Soit f une fonction continue sur $I \subset \mathbb{R}$. Soit $a \in I$. Alors la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a.
     F est de classe C^1 sur I et vérifie $F' = f$.

6. **Intégrales généralisées**
   - Soit f une fonction continue ou continue par morceaux sur $]-\infty;a]$.On dit que **l'intégrale** $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ **est convergente** si la fonction $x \to \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$. On pose alors
     $$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\,dt$$
     Dans le cas contraire on dit que l'intégrale diverge.
   - Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge s'il existe un réel a tel que
     (a) l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge et
     (b) l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f(t)dt$ converge.
   - Intégrale de Riemann :
     $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ converge pour $\alpha > 1$ et diverge pour $\alpha \leqslant 1$.
   - Intégrale de Gauss :
     L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ converge et on a :
     $$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$
   - $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,dt$ est convergente si et seulement si $\alpha > 0$

Fonction f	**Primitive** F	**Intervalle I**
a (constante)	ax	$\mathbb{R}$
x^n $(n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\})$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$ si $n \geq 0$ et $]0;+\infty[$ ou $]-\infty;0[$ si $n<0$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0;+\infty[$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\|x\|$	$]0;+\infty[$ ou $]-\infty;0[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
e^{ax}	$\dfrac{e^{ax}}{a}$	$\mathbb{R}$ (et $a \neq 0$)

Les opérations sur les fonctions dérivables et la définition d'une primitive conduisent aux résultats suivants:

— si F et G sont des primitives des fonctions f et g sur un intervalle I, alors $F+G$ est une primitive de $f+g$ sur I.

— Si F est une primitive de la fonction f sur un intervalle I et λ un réel, alors λF est une primitive de λf sur I.

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, on a alors:

Fonction f	**Primitive** F	**Remarques**
$u'u^n$ $(n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\})$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	si $n<0$, alors pour tout x tel que $u(x) \neq 0$
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u>0$ sur I
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln(\|u\|)$	$u \neq 0$ sur I
$u'e^u$	e^u	
$x \longmapsto u(ax+b)$ $(a \neq 0)$	$x \longmapsto \dfrac{1}{a}U(ax+b)$	U primitive de u sur I

et bien sur les formules du 1er tableau où on remplace x par u et l'expression doit faire intervenir une multiplication par u'

Formule d'integration par parties :

$$\int uv' = [uv] - \int u'v$$

Formule d'integration par changement de variable :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx$$

on a posé $x=\varphi(t)$ alors $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t$

7.2 Méthodes

7.3 Exercices

Exercice 7.1 (**) :(solution ►)

1. On pose, pour tout entier naturel n non nul,

$$I_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n \mathrm{e}^{-x}\,dx.$$

   (a) À l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1.

   (b) Prouver que, pour tout entier naturel n non nul,

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n!}\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,dx.$$

   En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

   (c) Montrer, en utilisant une intégration par parties que pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} - I_n$$

2. On considère la suite réelle (a_n), définie sur $\mathbb{N}^*$ par $a_1 = 0$ et, pour tout entier naturel n non nul,

$$a_{n+1} = a_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

   (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul,

$$a_n = \frac{1}{\mathrm{e}} + (-1)^n I_n.$$

   (b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

Exercice 7.2 (**) :(solution ►)

On considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$I_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{1+n+t}\,\mathrm{d}t.$$

1. (a) Déterminer le sens de variations de cette suite.

   (b) Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, est une suite positive.

   (c) Montrer que pour tout $t \in [0\,;\,1]$ on a $\dfrac{\mathrm{e}^{-t^2}}{1+t+n} \leqslant \dfrac{1}{1+n}$ et en déduire que $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
   Que peut-on en conclure quant à la convergence de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

2. On considère f et g deux fonctions définies sur $[0\,;\,1]$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x} + x - 1 \qquad \text{et} \qquad g(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \mathrm{e}^{-x}.$$

   (a) Étudier le sens de variations et le signe de f.

   (b) En déduire le sens de variations de g sur $[0\,;\,1]$.

(c) Établir, pour tout x appartenant à $[0\ ;\ 1]$, l'encadrement :

$$1-x \leqslant \mathrm{e}^{-x} \leqslant 1-x+\frac{x^2}{2}.$$

(d) En déduire un encadrement de e^{-t^2} pour tout t appartenant à $[0\ ;\ 1]$.

(e) Établir l'encadrement :

$$\frac{2}{3(n+2)} \leqslant I_n \leqslant \frac{23}{30(n+1)}$$

Chapitre 8

Calcul de sommes

8.1 Résumé de cours

1. **Définitions**
   - Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $[\![0;n]\!]$ l'ensemble $\{0;1;2;\dots;n\}$
   - $\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ et il y a $(n+1)$ termes dans la somme.
   - $\sum_{k=p}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ et il y a $(n+1-p)$ termes dans la somme.

2. **Propriétés**
   - $\sum_{k=0}^{n} (u_k + v_k) = \sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=0}^{n} v_k$
   - Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\sum_{k=0}^{n} (\lambda u_k) = \lambda \sum_{k=0}^{n} u_k$
   - Changement d'indice, par exemple : $\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{j=1}^{n+1} u_{j-1}$ si on a posé $j = k+1$

3. **Sommes particulières à connaître**
   - $\boxed{\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}}$ $\boxed{\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$ $\boxed{\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}}$
   - $\boxed{\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$ si $q \neq 1$ et $\sum_{k=0}^{n} 1^k = n+1$
   - *Formule du binôme* :
     $$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^k a^{n-k} = (a+b)^n}$$
     et on en déduit les formules suivantes :
     $\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k (-1)^{n-k} b^{n-k} = (a-b)^n}$ $\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n}$ $\boxed{\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0}$

4. **Autres**
   - Factorisations :

$$\boxed{a^n - b^n = (a-b)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k\right) = (a-b)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}\right)}$$

et si n est impair on obtient en remplaçant b par $-b$:

$$\boxed{a^n + b^n = (a+b)\left(\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a^{n-1-k} b^k\right)}$$

- *Sommes télescopiques*:
  exemple-méthode : on applique les propriétés et le changement d'indice
  $\sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=0}^{n} u_{k+1} - \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{j=1}^{n+1} u_j - \sum_{j=0}^{n} u_j = u_{n+1} - u_0$

8.2 Exercices

Exercice 8.1 () :(solution ►)
Calculer $A_n = \sum_{k=0}^{n} (k^2 + 3^k)$

Exercice 8.2 () :(solution ►)
Calculer $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ après avoir déterminé 2 réels a et b tels que $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$

Exercice 8.3 () :(solution ►)
Calculer $\sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k-1}{k}\right)$

Exercice 8.4 () :(solution ►)
Soient x un réel dans l'intervalle $[0,1[$, n un entier naturel non nul et S_n la fonction définie par :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$$

1. Calculer la somme $S_n(x)$.
2. Dériver l'égalité obtenue et montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$$

Chapitre 9

Séries

9.1 Résumé de cours

1. **Définitions-Propriétés**
   - Soit u une suite réelle. On appelle **série de terme général** u_n, et on note $\sum u_n$, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
   $$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$
   S_n est appellée la **somme partielle d'indice** n.

   - On dit que la **série** $\sum u_n$ **converge** si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. La limite S de cette suite est alors appelée **somme de la série** et on la note
   $$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$
   On dit que la série **diverge** si la la suite (S_n) ne converge pas.

   - Si la série $\sum u_n$ converge on appelle **reste d'indice** n le réel :
   $$R_n = S - S_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

   - Soient u et v deux suites réelles ne différant que par un nombre fini de termes.
   Alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

   - Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries.
     (a) Pour tout réel $\lambda \neq 0$, les séries $\sum \lambda u_n$ et $\sum u_n$ sont de même nature et si les séries convergent, on a :
     $$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda u_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$
     (b) Si les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes alors la série $\sum(u_n + v_n)$ est convergente et :
     $$\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

   - Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.
   La **suite** u est convergente si et seulement si la **série** de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge et, on a alors :
   $$\sum_{n=0}^{+\infty}(u_{n+1} - u_n) = \lim_{n\to+\infty}(u_n) - u_0$$

- Condition nécessaire de convergence :
  Soit $\sum u_n$ une série convergente. Alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

2. **Séries de référence**
   - Pour tout réel x, la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge et on a :
   $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$
   Cette série est appelée **série exponentielle**.

   - Soit $x \in \mathbb{R}$. La série $\sum x^n$ s'appelle la **série géométrique de raison** x.
   Cette série est convergente si et seulement si $|x| < 1$ et on a alors :
   $$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$
   - La série $\sum_{n\geq 1} nx^{n-1}$ s'appelle **la série dérivée première de la série géométrique de raison** x. Cette série converge si et seulement si $|x| < 1$ et on a
   $$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$
   - La série $\sum_{n\geq 2} n(n-1)x^{n-2}$ s'appelle **la série dérivée seconde de la série géométrique de raison** q. Cette série converge si et seulement si $|x| < 1$ et on a
   $$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$$
   - La série $\sum \frac{1}{n}$ est appelée **série harmonique**.
   La série harmonique est une série divergente.
   - Série de Riemann :
   Soit α un réel. La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

3. **Convergence absolue**
   - Soit $\sum u_n$ une série. On dit que la série **converge absolument** ou est **absolument convergente** si la série $\sum |u_n|$ est convergente.
   - Soit $\sum u_n$ une série. Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente alors elle est convergente

9.2 Méthodes

1. *Séries de référence* :
   Il faut avant tout connaître les séries de référence qui interviennent dans les calculs et dans les méthodes
   ↪ Série géométrique : elle converge si $|q| < 1$ et on a $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$
   ↪ Série géométrique dérivée : elle converge si $|q| < 1$ et on a $\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$
   ↪ Série géométrique dérivée seconde : elle converge si $|q| < 1$ et on a $\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$

↪ Série exponentielle : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$

↪ Série de Riemann : $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha \leq 1$

2. *Démontrer la convergence d'une série et calculer sa somme*

↪ On peut démontrer séparément la convergence avec les théorèmes de convergence(vus en 2ème année) puis calculer la somme en utilisant des séries de référence.

↪ Si tout est posé dans la même question, il est en fait certainement plus judicieux de calculer la somme partielle $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ puis de chercher sa limite quand n tend vers $+\infty$: on prouve ainsi à la fois à la convergence et le résultat de la limite est la somme de la série.

3. *Calculer la somme d'une série* :

On repère les séries usuelles. Sinon on essaie de les faire apparaître à l'aide des méthodes suivantes qu'on appliquera de préférence sur la **somme partielle** pour éviter des erreurs en manipulant éventuellement des séries divergentes :

↪ Un changement d'indice.

↪ Un terme nul qui permet de réécrire la somme en décalant l'indiçage comme dans cet exemple classique : $\sum_{k=0}^{n} kx^k = \sum_{k=1}^{n} kx^k$

↪ En utilisant les transformations d'écriture astucieuses classiques :

$\sum_{k=1}^{n} x^k = x\sum_{k=0}^{n} x^k - 1$ afin de reconnaître la série géométrique après passage à la limite.

$\sum_{k=1}^{n} kx^k = x\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$ afin de reconnaître la série géométrique dérivée après passage à la limite.

$\sum_{k=0}^{n} k^2x^k = \sum_{k=1}^{n} k^2x^k = \sum_{k=1}^{n} k(k-1+1)x^k = \sum_{k=1}^{n} k(k-1)x^k + \sum_{k=1}^{n} kx^k$ puis on traite séparément chacun des deux termes :

$\sum_{k=1}^{n} k(k-1)x^k = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)x^k = x^2\sum_{k=1}^{n} k(k-1)x^{k-2}$ pour reconnaître la série géométrique dérivée seconde après passage à la limite.

$\sum_{k=1}^{n} kx^k = x\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$ afin de reconnaître la série géométrique dérivée après passage à la limite.

↪ Il faut aussi connaître la possibilité de remarquer un télescopage dans l'écriture de la somme partielle auquel cas le résultat de la série s'obtient par limite : $S_n = \sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0$.

4. *Démontrer qu'une série diverge* :

↪ Le terme général u_n ne tend pas vers 0 alors $\sum u_n$ diverge.

5. *Etudier une série de terme non constant* :

↪ On essaie d'utiliser l'absolue convergence car la valeur absolue permet de travailler avec des séries à termes positifs et donc d'appliquer les méthodes de convergence.

↪ On travaille avec la somme partielle.

6. *Une démarche particulière* (complément qui sera étudié en 2ème année utilisant les propriétés de l'intégration.)

↪ On encadre $f(t)$ pour $t \in [k; k+1]$ grâce au sens de variation de f ; par exemple si f est croissante on écrit :
$k \leq t \leq k+1$ donne $f(k) \leq f(t) \leq f(k+1)$

↪ On intégre ensuite cette inégalité d'après le théorème de croissance de l'intégrale :
$\int_k^{k+1} f(k)dt \leq \int_k^{k+1} f(t)dt \leq \int_k^{k+1} f(k+1)dt$ donne $f(k) \leq \int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k+1)$

↪ On somme ensuite :
$f(k) \leq \int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k+1)$ donne $\sum_{k=0}^{n} f(k) \leq \sum_{k=0}^{n} \int_k^{k+1} f(t)dt \leq \sum_{k=0}^{n} f(k+1)$

↪ On termine en utilisant ce que donne l'énoncé , à savoir $S_n = \sum_{k=0}^{n} f(k)$ et en utilisant la relation de Chasles pour le milieu de l'inégalité :
$S_n \leq \int_0^{n+1} f(t)dt \leq \sum_{j=1}^{n+1} f(j) = S_n + f(n+1) - f(0)$

↪ On utilise enfin cet encadrement pour répondre aux questions posées en utlisant souvant le théorème des gendarmes. A savoir que l'inégalité précédente peut se transformer pour encadrer S_n de la manière suivante :
$S_n \leq \int_0^{n+1} f(t)dt$ et $\int_0^{n+1} f(t)dt \leq \sum_{j=1}^{n+1} f(j) = S_n + f(n+1) - f(0)$ donne $\int_0^{n+1} f(t)dt - f(n+1) + f(0) \leq$
$S_n \leq \int_0^{n+1} f(t)dt$

7. *Sommes de Riemann* :
Ce cas particulier peut s'utiliser directement pour le calcul de la limite d'une somme bien particulière
↪ Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Alors on a :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

9.3 Exercices

Exercice 9.1 (*) :(solution ►)
Justifier la convergence et calculer la somme de la série $\sum_{n\geq 0} n\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Exercice 9.2 (**) :(solution ►)
Justifier la convergence et calculer la somme de la série $\sum_{n\geq 0} n^2\left(\frac{1}{3}\right)^n$

Exercice 9.3 (*) :(solution ►)
On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{5}{n(n+1)}$ pour $n \geq 1$

1. Déterminer deux réels a et b tels que $u_n = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1}$
2. En déduire la convergence et la somme de la série.

Exercice 9.4 (**) :(solution ►)

Soit $u_0 \in]0;1[$, $\forall n \in \mathbb{N}$ on pose $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

1. On pose $f(x) = x - x^2$. Etudier les variations de f sur $[0;1]$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$
3. Etudier le sens de variation de la suite (u_n) puis en déduire que u_n converge vers 0.
4. Montrer que la série de terme général u_n^2 converge et calculer sa somme.

Chapitre 10

Espaces vectoriels et applications linéaires

10.1 Résumé de cours

1. **Espaces vectoriels**
   - Un *espace vectoriel* est un ensemble E muni d'une loi de composition interne notée $+$, et d'une *loi de composition externe* notée $\cdot$, telles que

     (a) $(E, +)$ est un groupe commutatif, c'est à dire
     - la loi + est interne : $\forall (u, v) \in E^2, \quad u + v \in E$.
     - la loi est *associative* : $\forall (u, v, w) \in E^3, \quad (u + v) + w = u + (v + w)$
     - la loi est *commutative* : $\forall (u, v) \in E^2, \quad u + v = v + u$
     - la loi admet un *élément neutre* noté 0_E : $\forall u \in E, \quad u + 0_E = 0_E + u = u$
     - tout élément admet un *élément symétrique* $\forall u \in E, \exists -u \in E \quad u + (-u) = (-u) + u = 0_E$

     (b) la loi $\cdot$ est une application : $\begin{cases} \mathbb{R} \times E \to E \\ (\lambda, u) \to \lambda \cdot u \end{cases}$ telle que
     - $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall (u, v) \in E^2, \qquad \lambda \cdot (u + v) = (\lambda \cdot u) + (\lambda \cdot v)$
     - $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall u \in E, \qquad (\lambda + \mu) \cdot u = (\lambda \cdot u) + (\mu \cdot u)$
     - $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall u \in E, \qquad \lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda \times \mu) \cdot u$
     - $\forall u \in E, \qquad 1 \cdot u = u$
   - Soient des matrices $A = (a_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $B = (b_i)_{1 \leq i \leq n}$ de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
     On définit des matrices $S = A + B$ et $C = \lambda.A$ de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ en posant :

     $$\forall i \in [\![1, n]\!], \forall j \in [\![1, p]\!], \quad s_i = a_i + b_i, \quad c_i = \lambda a_i$$

     L'ensemble $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni de ces lois possède une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
     L'élément nul est la matrice nulle.

2. **Sous-espace vectoriel**
   - F est un sev de E si et seulement si :

     ❶ $F \subset E$

     ❷ $F \neq \emptyset$

     ❸ $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall (u, v) \in F^2 \quad \lambda \cdot u + \mu \cdot v \in F$.
   - Si E_1 et E_2 sont des sous-espaces vectoriels de E, alors $E_1 \cap E_2$ est un sous-espace vectoriel de E.
     Plus généralement si $(E_i)_{i \in I}$ est une famille de sous-espaces vectoriels de E, alors $\bigcap_{i \in I} E_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

- Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et A une partie de E. L'intersection de tous les sous-espaces vectoriels qui contiennent A est le plus petit sous-espace vectoriel qui contient A.
  On le note $\text{Vect}(A)$
- L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à p inconnues est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$.

3. **Familles et parties**

- Une famille de p vecteurs est un p-uplet $\mathscr{U} = (u_1, u_2, \dots u_p)$.

  Si $(x_1, x_2, \dots x_p) \in \mathbb{R}^p$, alors le vecteur $u = \sum_{k=1}^{p} x_k u_k$ est une *combinaison linéaire* de vecteurs de $\mathscr{U}$, dont $x_1, x_2, \dots x_p$ sont les *coefficients.*
- L'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathscr{U}$ se note

$$\text{Vect}(\mathscr{U}) = \left\{ \sum_{k=1}^{p} x_k u_k \,\middle|\, (x_1, x_2, \dots x_p) \in \mathbb{R}^p \right\}$$

  L'ensemble $\text{Vect}(\mathscr{U})$ est un sous-espace vectoriel de E dit *sous-espace engendré* par $\mathscr{U}$
- On dit qui $\mathscr{U}$ est *génératrice* de E si et seulement si :

$$\forall u \in E \quad \exists (\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_p) \in \mathbb{R}^p \quad u = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k u_k$$

  ce qui revient à $E = \text{Vect}(\mathscr{U})$, car $\mathscr{U} \subset E$ entraîne $\text{Vect}(\mathscr{U}) \subset E$ par stabilité de E.
- Une famille $\mathscr{U}$ est *libre* si et seulement si:

$$\forall (\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_p) \in \mathbb{R}^p \quad \sum_{k=1}^{p} \lambda_k u_k = 0_E \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots \lambda_p = 0$$

  Sinon, $\mathscr{U}$ est dite *liée.* Donc $\mathscr{U}$ liée si et seulement si :

$$\exists (\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_p) \in \mathbb{R}^p \text{ non tous nuls tels que } \sum_{k=1}^{p} \lambda_k u_k = 0_E$$

- Une famille $\mathscr{U} = (u_1, u_2, \dots u_p)$, $p > 1$ est liée si et seulement si un des vecteurs de $\mathscr{U}$ est une combinaison linéaire des autres.
- Une *base* de E est une famille libre et génératrice de E.
- Une famille $(u_1, u_2, \dots u_p)$ de vecteurs de E est une base de E si et seulement si

$$\forall u \in E, \exists! (\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_p) \in \mathbb{R}^p, \quad u = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k u_k$$

- Toute famille contenant une famille liée est liée.
- Toute famille contenue dans une famille libre est libre.
- Une famille $\mathscr{U} = (u_1, u_2, \dots u_p)$ de vecteurs de E,espace vectoriel est une **libre** si et seulement si tout vecteur de $\text{Vect}(\mathscr{U})$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de vecteurs de cette famille.

4. **Applications linéaires**

- E et F étant deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$, $f : E \to F$ est une *application linéaire* (ou *homorphisme*) si et seulement si :

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall (u, v) \in E^2 \quad f(\lambda.u + \mu.v) = \lambda.f(u) + \mu.f(v)$$

- On note $\mathscr{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

- Si $E = F$, on dit que f est un *endomorphisme* et on note $f \in \mathscr{L}(E)$
- Une bijection $f \in \mathscr{L}(E,F)$ s'appelle *isomorphisme* de E sur F.Un isomorphisme de E sur lui même s'appelle *automorphisme* de E
- Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$; alors $f(0_E) = 0_F$
- Image : $\mathrm{Im} f = f(E) = \{f(u) | u \in E\}$ est l'image de f. C'est un sev de F.
- Noyau : $\mathrm{Ker}(f) = \{u \in E, f(u) = 0_F\}$ est le noyau de f. C'est un sev de E.
- $f \in \mathscr{L}(E,F)$ est surjective si et seulement si $\mathrm{Im} f = F$.
- $f \in \mathscr{L}(E,F)$ est injective si et seulement si $\ker f = \{0_E\}$.

5. **Matrice d'une application linéaire**
   - Soit E un espace vectoriel fini de dimension n muni d'une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$
     Soit $u \in E$. On appelle matrice du vecteur u dans la base $\mathscr{B}$ la matrice colonne notée $M_{\mathscr{B}}(u) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont les coordonnées de u dans la base $\mathscr{B}$

   - Soit E un espace vectoriel fini de dimension p muni d'une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$
     Soit F un espace vectoriel fini de dimension n muni d'une base $\mathscr{B}' = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$
     Soit $f : E \to F$ une application linéaire.
     On appelle matrice de f dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ la matrice $M_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ définie comme la matrice de la famille de vecteurs $(f(e_1), \ldots, f(e_p))$

   - Soient E et F des espaces vectoriels de dimensions finies p et n de bases $\mathscr{B}$.
     Soit x un vecteur de E et $f(x)$ son image dans F par f.
     On pose $X = M_{\mathscr{B}}(x), \quad Y = M_{\mathscr{B}'}(f(x)), \quad A = M_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f), \quad$ alors $\boxed{Y = AX}$

   - Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie munis de bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$.
     Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(E,F)$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$
     Alors $M_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(\lambda f + g) = \lambda M_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f) + M_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(g)$

6. **Changement de base**(Complément)
   - Soit E un espace de dimension finie n, de bases $\mathscr{B}$ (l'ancienne base) et $\mathscr{B}'$ (la nouvelle base).
     La matrice P représentant la famille $\mathscr{B}'$ en base $\mathscr{B}$ est la **matrice de passage** de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ notée aussi $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$.
   - (a) $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}} = I_n$
     (b) La matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$, est la matrice représentative de l'application identité Id_E, de E muni de la base $\mathscr{B}'$ dans E muni de la base $\mathscr{B}$:
     $$P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = M_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(Id_E)$$
     (c) $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ est carrée et inversible d'inverse $P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$
   - Soit E un espace vectoriel de dimension n.
     Si X et X' sont les matrices colonnes représentant $x \in E$ dans $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ et P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$, alors $\boxed{X = PX'}$.
   - Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
     Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.
     Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E.
     Soit $A = M_{\mathscr{B}}(f)$ et $A' = M_{\mathscr{B}'}(f)$.

Soit $P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.

$$\boxed{A' = P^{-1}AP}$$

10.2 Méthodes

1. *Démontrer qu'un ensemble F est un sous-espace vectoriel de E* :

   $\hookrightarrow$ Avec la méthode en 3 points :
   - 0_E est dans l'ensemble,
   - l'ensemble F est inclus dans E,
   - $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \mu \in \mathbb{R}, \forall u \in F, \forall v \in F, \lambda u + \mu v \in F$

     La difficulté étant de bien repérer qui sont les vecteurs u et v dans l'énoncé et quelle est la propriété donnée pour définir l'ensemble F afin de montrer l'appartenance de $\lambda u + \mu v$ à F en montrant que $\lambda u + \mu v$ vérifie cette propriété.

   $\hookrightarrow$ En utilisant les sous-espaces vectoriels particuliers : sous-espace engendré par une famille(méthode du vect), sous-espaces propres.

   $\hookrightarrow$ reconnaître un noyau ou une image.

2. *Montrer qu'un espace est un espace vectoriel* :

   On montre qu'en fait c'est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de référence : $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{R}_n[X]$ ou $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ par exemple.

3. *Montrer qu'une famille est libre* :

   Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ cette famille.

   $\hookrightarrow$ On résout $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0$ qu'on écrit sous forme de système et on prouve que la seule solution est $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$

   $\hookrightarrow$ Il faut connaître les cas particuliers de deux vecteurs (libres si et seulement si ils ne sont pas colinéaires) et d'une famille échelonnée (toujours libre).

4. *Famille génératrice* :

   $\hookrightarrow$ En général elle provient de la mise en forme du problème posé sous forme de Vect.

   $\hookrightarrow$ Si l'un des vecteurs d'une famille génératrice est combinaison linéaire des autres, on peut le retirer et on obtient une famille qui engendre le même espace.

5. *Bases* :

   $\hookrightarrow$ Par définition c'est une famille libre et génératrice.

   $\hookrightarrow$ tout élément de l'ensemble est combinaison linéaire unique de la famille.

   $\hookrightarrow$ On utilise très souvent cette propriété pour montrer qu'une famille est une base : Une famille ayant le même nombre de vecteurs que la dimension de l'espace est une base de cet espace si et seulement si elle est libre.

   $\hookrightarrow$ Une famille ayant le même nombre de vecteurs que la dimension de l'espace est une base de cet espace si et seulement si elle est génératrice.

   $\hookrightarrow$ Il faut connaître les bases canoniques des espaces vectoriels de référence.

6. *Démontrer qu'une application f est une application linéaire sur E* :
   $\hookrightarrow$ Une méthode : montrer que $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \mu \in \mathbb{R}, \forall u \in E, \forall v \in E, f\left(\lambda u+\mu v\right)=\lambda f(u)+\mu f(v)$

7. *Déterminer le noyau de f.* :
   $\hookrightarrow$ On résout le système établi à partir de $u \in \operatorname{Ker}(f) \Leftrightarrow f(u)=0$ en ayant posé des coordonnées pour u qui seront donc à trouver par la résolution du système.
   $\hookrightarrow$ Savoir aussi le lien f est injective $\Leftrightarrow \operatorname{Ker}(f)=\{0_E\}$

8. *Déterminer l'image de f* :
   $\hookrightarrow$ On résout le système provoqué par la définition : $y \in \operatorname{Im}(f)$ si et seulement $\exists x_i nE | y=f(x)$.
   $\hookrightarrow$ Pour déterminer $Im(f)$ on cherche l'image par f des vecteurs d'une base de E. La famille ainsi construire est ainsi génératrice de $Im(f)$. Attention, rien ne dit que cette famille est libre et qu'elle forme donc une base de $Im(f)$.
   $\hookrightarrow$ Il faut aussi savoir transformer l'écriture précédente qui est sous forme de Vect en une ou des équations.
   $\hookrightarrow$ Penser à utiliser f est surjective $\Leftrightarrow Im(f)=E$.

9. *Ecrire la matrice d'un application linéaire* :
   $\hookrightarrow$ La méthode la plus fréquente est celle consistant à écrire en colonne les corrdonnées des images par f des vecteurs de la base donnée.
   $\hookrightarrow$ L'autre méthode est celle consistant à traduire matriciellement $y=f(x)$ sous la forme $Y=AX$ où X est la matrice colonne des coordonnées du vecteur x, Y est la matrice colonne des coordonnées du vecteur y, A est la matrice cherchée.

10.3 Exercices

Exercice 10.1 (*) :(solution ►)
Démontrer que les espaces suivants sont des espaces vectoriels. En donner des bases respectives.

1. $A=\left\{\begin{pmatrix} a \\ a+2b \\ 3b \end{pmatrix}, \quad (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$
2. $B=\left\{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\in\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}) | \begin{cases} a+b+c=0 \\ 2b-c=0 \end{cases}\right\}$
3. $C=\left\{X\in\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R}) | \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} X=3X\right\}$.

Exercice 10.2 (*) :(solution ►)

Déterminer, parmi les familles suivantes, celles qui sont des bases de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$\mathscr{B}_1=\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right), \quad \mathscr{B}_2=\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right), \quad \mathscr{B}_3=\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

Exercice 10.3 (**) :(solution ►)
On considère les espaces vectoriels suivants:
$E=\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $F=\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$

ainsi que l'application f définie par $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x-y+z \\ x+y+z \end{pmatrix}$.

1. Justifier que f est linéaire.
2. Expliciter une matrice A telle que $\forall X \in E, \quad f(X) = AX$.
3. Donner une base de $\ker(f)$ et de $\operatorname{Im}(f)$.

Exercice 10.4 (**) :(solution ►)

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est : $A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 8 & -15 & -8 \\ -10 & 20 & 11 \end{pmatrix}$

On pose $\overrightarrow{u} = (2,4,-5)$, $\overrightarrow{v} = (1,0,1)$, $\overrightarrow{w} = (0,1,-2)$

1. Calculer $f(\overrightarrow{u})$, $f(\overrightarrow{v})$ et $f(\overrightarrow{w})$.
2. Montrer que $\mathscr{B}' = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer la matrice A' de f dans la base $\mathscr{B}'$.
4. Calculer A'^2 et en déduire f^2.

Exercice 10.5 (**) :(solution ►)

Soit E un espace vectoriel et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Pour tout réel a différent de 1, on considère l'endomorphisme f_a de l'espace vectoriel E dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est donnée par

$$M_a = \begin{pmatrix} a+2 & -(2a+1) & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit de plus $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ la famille de vecteurs de E définie par

$$\begin{cases} e'_1 = a^2 e_1 + a e_2 + e_3 \\ e'_2 = e_1 + e_2 + e_3 \\ e'_3 = 2e_1 + e_2 \end{cases}$$

1. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles la matrices M_a n'est pas inversible.
2. En déduire les valeurs de a pour lesquelles f_a est un automorphisme.
3. Prouver que $\mathscr{B}'$ est une base de E.
4. Calculer $f_a(e'_1)$, $f_a(e'_2)$ et $f_a(e'_3)$.
5. En déduire la matrice de f_a relativement à la base $\mathscr{B}'$. On notera T_a cette matrice.

Chapitre 11

Variables aléatoires discrètes

11.1 Résumé de cours

1. **Généralités sur les variables aléatoires discrètes**
   - Soit $(\Omega, \mathscr{A})$, un espace probabilisable. On appelle **variable aléatoire réelle discrète** définie sur $(\Omega, \mathscr{A})$ toute application X de Ω dans $\mathbb{R}$ telle que :
     - $X(\Omega) = \{x_i \,/\, i \in I\}$ avec $I = \mathbb{N}, \mathbb{Z}$ ou une de leurs parties finies.
     - pour tout $x \in X(\Omega)$, $\{\omega \in \Omega / X(\omega) = x\} \in \mathscr{A}$

   - On appelle **loi de probabilité** de la VAR discrète X (ou **distribution de** X) l'ensemble de couples (x_i, p_i) où :
   $$x_i \in X(\Omega) \quad \text{et} \quad p_i = P(X = x_i)$$
   - Soit X une VAR discrète. Si $X(\Omega) = \{x_i \,/\, i \in I\}$ alors la famille d'événements $(X = x_i)_{i \in I}$ est un système complet d'événements.
   En particulier on a $\sum\limits_{i \in I} P(X = x_i) = 1$
   - On appelle **fonction de répartition de** X l'application $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :
   $$F(x) = P(X \leqslant x)$$

   ❶ La fonction de répartition d'une VAR discrète est une fonction en escalier.

   ❷ $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) \in [0;1]$

   ❸ F est croissante sur $\mathbb{R}$.

   ❹ $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

   ❺ $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $P(a < X \leqslant b) = F(b) - F(a)$

   ❻ Si X est à valeurs dans $\mathbb{N}$, $\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = F(k) - F(k-1)$

   ❼ Si $X(\Omega) = \{x_i \,/\, i \in I\}$. Si les x_i sont rangés par ordre croissant alors pour tout $x \in I$ tel que $i - 1 \in I$ (on a donc $x_{i-1} < x_i$) on a
   $$P(X = x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$$

   - Soit X une VAR discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et g une fonction définie sur $X(\Omega)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On note $Y = g(X)$ l'application de Ω dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $\omega \in \Omega$ par
   $$Y(\omega) = g(X)(\omega) = g(X(\omega))$$

- Soient X une VAR discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et g une fonction définie sur $X(\Omega)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors $Y = g(X)$ est une VAR discrète définie sur Ω et telle que :

$$Y(\Omega) = \{g(x_i) / i \in I\}$$

$$\forall y \in Y(\Omega), \ \ P(Y = y) = \sum_{i / g(x_i) = y} P(X = x_i)$$

- Pour toute variable aléatoire réelle discrète **finie** X sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ telle que $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, on appelle **espérance de** X, le réel

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$$

- Soit X une variable aléatoire réelle discrète **infinie** sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ telle que $X(\Omega) = \{x_i, i \in \mathbb{N}\}$, si $\sum\limits_{i \geq 0} x_i P(X = x_i)$ converge absolument alors on dit que X admet une **espérance de** X, égale au réel

$$E(X) = \sum_{i=0}^{+\infty} x_i P(X = x_i)$$

- Soit X une VAR discrète admettant une espérance $E(X)$. Soit (a, b) un couple de réels.
L'application $Y = aX + b$ est une VAR discrète admettant $E(Y) = aE(X) + b$ comme espérance.

- Pour toute VAR discrète X admettant une espérance $E(X)$, la VAR $X - E(X)$ est une VAR discrète centrée appelée variable aléatoire centrée associée à X.

- Théorème de transfert.
Pour toute variable aléatoire réelle discrète **finie** X sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ telle que $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, et pour toute fonction g de $X(\Omega)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, la variable aléatoire $g(X)$ admet une espérance

$$E\big(g(X)\big) = \sum_{i=1}^{n} g(x_i) P(X = x_i)$$

- Pour toute variable aléatoire réelle discrète **infinie** X sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ telle que $X(\Omega) = \{x_i, i \in \mathbb{N}\}$, et pour toute fonction g de $X(\Omega)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, la variable aléatoire $g(X)$ admet une espérance si et seulement si la série

$$\sum_{i \geq 0} g(x_i) P(X = x_i) \text{ converge absolument}$$

et on a alors

$$E\big(g(X)\big) = \sum_{i=1}^{+\infty} g(x_i) P(X = x_i)$$

- Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Soit X une VAR discrète finie telle que X^r admet une espérance alors on dit que X admet un **moment d'ordre** r qui est le réel $m_r(X) = E(X^r)$.
- Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Soit X une VAR discrète infinie telle que la série de terme général $x_n^r P(X = x_n)$ soit absolument convergente ; alors on dit que X admet un **moment d'ordre** r qui est le réel $m_r(X) = E(X^r) = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} x_i^r P(X = x_i)$.
- Soit X une VAR discrète admettant une espérance et telle que la variable $X - E(X)$ admet un moment d'ordre 2. On appelle **variance de** X le réel :

$$V(X) = E\big((X - E(X))^2\big)$$

De plus lorsque $V(X)$ existe, on appelle **écart-type de** X le réel $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

- Si X est une VAR discrète admettant une variance et telle que $\sigma(X) = 1$, on dit que X est une variable réduite.
  Si X est une VAR discrète admettant une variance et telle que $E(X) = 0$ et $\sigma(X) = 1$, on dit que X est une variable centrée réduite.
  Si X est une VAR discrète admettant une variance non nulle, la variable aléatoire $X^* = \dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est une VAR discrète centrée réduite appelée la **variable aléatoire centrée réduite associé à** X.
- Formule de Huygens:
  Soit X une VAR discrète. X admet une variance ssi X admet un moment d'ordre 2 et en cas d'existence on a :
$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$
- Si X est une VAR discrète admettant une variance alors pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $aX + b$ admet une variance et
$$V(aX + b) = a^2 V(X)$$

2. **Lois discrètes finies usuelles**
- Loi uniforme :
  Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que X suit la **loi uniforme sur** $[\![1; n]\!]$ si :
$$X(\Omega) = [\![1; n]\!]$$
$$\forall k \in [\![1; n]\!], \quad P(X = k) = \frac{1}{n}$$
  Soit X une VAR qui suit la loi uniforme sur $[\![1; n]\!]$. Alors :
$$E(X) = \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{n^2 - 1}{12}$$
- Loi de Bernoulli :
  Soit $p \in [0; 1]$. On dit qu'une VAR X suit la **loi de Bernoulli de paramètre** p **(notée** $\mathscr{B}(1, p)$**)** si :
$$X(\Omega) = \{0; 1\}$$
$$P(X = 0) = 1 - p \qquad \text{et} \qquad P(X = 1) = p$$
  Si X suit une loi de Bernoulli alors
$$E(X) = p \quad \text{et} \quad V(X) = p(1 - p)$$
- Loi binomiale :
  Soit $p \in [0; 1]$ et $n \in \mathbb{N}$. On dit que la VAR X suit la **loi binomiale de taille** n **et de paramètre** p **(notée** $\mathscr{B}(n, p)$**)** si :
$$X(\Omega) = \{0, 1, \ldots, n\} = [\![0; n]\!]$$
  Soit X une VAR qui suit la loi $\mathscr{B}(n, p)$. Alors on a :
$$E(X) = np \quad \text{et} \quad V(X) = np(1 - p)$$
$$\forall k \in [\![0; n]\!] \quad P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$
  Si X_1 et X_2 sont deux VAR indépendantes suivant des lois binomiales $\mathscr{B}(n_1, p)$ et $\mathscr{B}(n_2, p)$ alors $X_1 + X_2$ suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n_1 + n_2, p)$

- Loi géométrique :
  Soit $p \in]0;1[$. On dit qu'une VAR X suit **la loi géométrique de paramètre p (notée $\mathscr{G}(p)$)** si :

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^*$$

  Soit X une VAR qui suit la loi géométrique $\mathscr{G}(p)$. Alors :

$$E(X) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = k) = (1-p)^{k-1} p$$

- Loi de Poisson :
  Soit $\lambda > 0$. On dit qu'une VAR X suit une **loi de Poisson (notée $\mathscr{P}(\lambda)$)** si :

$$X(\Omega) = \mathbb{N}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

  Soit X une VAR qui suit la loi $\mathscr{P}(\lambda)$. Alors on a :

$$E(X) = \lambda \quad \text{et} \quad V(X) = \lambda$$

11.2 Méthodes

1. *Donner la loi suivie par X* :

$\hookrightarrow$ Si l'énoncé demande de donner la loi c'est en général qu'on est en présence d'une loi usuelle.

$\hookrightarrow$ Reconnaître une loi binomiale :
On doit avoir une variable aléatoire X comptant le nombre de fois qu'il y a un succès et on rédige ainsi :
On répète n fois de façon indépendante un scéma de Bernoulli : il y a deux issues
succès : ... avec une probabilité p=...
échec : ...avec une probabilité q=1-p
alors X suit une loi binomiale de paramètres n et p.
Pour tout entier k entre 0 et n, $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
$E(X) = np \quad V(X) = np(1-p)$

$\hookrightarrow$ Reconnaître une loi uniforme :
Si la variable est à caractère discret , repérer le fait qu'elle prend toutes les valeurs de l'univers de façon équiprobable (ex: dé à 6 faces non truqué, chacune des faces étant obtenue avec une probabilité égale à 1/6)).
Espérance : $\frac{n+1}{2}$ Variance : $\frac{n^2-1}{12}$.

$\hookrightarrow$ Reconnaître une loi géométrique :
Rang du premier succès pour une suite infinie d'expériences indépendantes ayant toutes la même probabilité de succès.

$\hookrightarrow$ Lorsqu'on effectue une expérience aléatoire « en deux temps » (lancer de dé, puis, selon le résultat du dé, on effectue des tirages différents) et qu'on étudie les résultats de la deuxième partie de l'expérience, la formule des probabilités totales sera indispensable pour distinguer ce qui se passe selon les résultats de la première moitié de l'expérience.

2. *Calculer $P(X = k)$* :
   - $\hookrightarrow$ Une variable est finie si elle ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs : Pour déterminer sa loi, on détermine les valeurs prises (l'univers) et la probabilité de chaque valeur.
   - $\hookrightarrow$ Une variable est discrète si ses valeurs prises peuvent être indexées par $\mathbb{N}$ ou une partie de $\mathbb{N}$: Pour déterminer sa loi, on détermine les valeurs prises (l'univers) et la probabilité de chaque valeur.

3. *Espérance, variance* :
   - $\hookrightarrow$ Si la variable est à caractère discret fini on peut calculer directement espérance et variance.
   - $\hookrightarrow$ Si la variable est à caractère discret infini il faut d'abord vérifier la qu'elle admet un espérance et une variance avant de faire les calculs, c'est à dire montrer la convergence des séries en question.
   - $\hookrightarrow$ Penser à utiliser les propriétés de l'espérance $E(aX+b) = aE(X)+b$ et $V(aX+b) = a^2V(X)$
   - $\hookrightarrow$ Connaître les espérances et variances lois usuelles.

11.3 Exercices

Exercice 11.1 (*) :(solution ►)

Soit X une var telle que pour tout entier $k \geq 2$: $\mathrm{P}(X = k) = q\ p^{k-1} + p\ q^{k-1}$ avec p et q deux réels de $]0;1[$ tels que $p+q = 1$.

1. Vérifier : $\sum_{k=2}^{+\infty} \mathrm{P}(X = k) = 1$
2. Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance et que : $E(X) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$.

Exercice 11.2 (**) :(solution ►)
Une urne contient initialement deux boules rouges et une boule bleue indiscernables au toucher.
On appelle " épreuve " la séquence suivante :
On tire une boule de l'urne, puis :

- Si la boule tirée est bleue , on la remet dans l'urne.
- Si la boule tirée est rouge , on ne la remet pas dans l'urne mais on remet une boule bleue dans l'urne à sa place.

L'expérience aléatoire consiste à effectuer une succession illimitée d'épreuves.
Pour tout entier naturel n non nul , on note Y_n la variable aléatoire discrète égale au nombre de boules rouges présentes dans l'urne à l'issue de la n - ième épreuve.
On notera pour chaque entier naturel k non nul les événements suivants :
R_k : " Lors de la k-ième épreuve on a extrait une boule rouge de l'urne. "
B_k : " Lors de la k-ième épreuve on a extrait une boule bleue de l'urne. "

1. Donner la loi de probabilité de Y_1.
2. Quelles sont les valeurs possibles de Y_n dans le cas où n est supérieur ou égal à 2 ?
3. Calculer pour tout entier naturel non nul n , $P(Y_n = 2)$.
4. On pose pour tout entier naturel non nul n , $u_n = P(Y_n = 1)$.

(a) Rappeler la valeur de u_1 et montrer que $u_2 = \frac{2}{3}$.

(b) En utilisant un système complet d'événements lié à la variable Y_n, montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$,

$$u_{n+1} = \frac{2}{3} u_n + \frac{2}{3^{n+1}}.$$

Cette relation reste-t-elle valable lorsque $n = 1$?

(c) On pose pour tout entier naturel n non nul $v_n = u_n + \frac{2}{3^n}$.
Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ est géométrique.
En déduire v_n en fonction de n et de v_1,
Etablir enfin que pour tout entier naturel non nul n, $u_n = 2\,(\frac{2}{3})^n - \frac{2}{3^n}$.

(d) Déduire des résultats précédents $P(Y_n = 0)$ pour tout entier naturel non nul n.

5. Calculer l'espérance de Y_n.

Exercice 11.3 (**) :(solution ►)

Une urne contient 8 boules rouges, 4 boules noires et 2 boules vertes. Un joueur effectue dans cette urne des tirages d'une boule, avec remise de la boule tirée avant de tirer la suivante, jusqu'à ce qu'il obtienne soit une boule rouge, auquel cas il a gagné et le jeu s'arrête, soit une boule verte, auquel cas il a perdu et le jeu s'arrête également. On désigne par

— X le nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule rouge
— Y le nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule verte.
— Z le nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule noire.
— R le nombre de tirages nécessaires pour que le joueur gagne. On conviendra que $R = 0$ si le joueur perd ou s'il n'est ni gagnant ni perdant.
— S le nombre de tirages nécessaires pour que le joueur perde. On conviendra que $S = 0$ si le joueur gagne ou s'il n'est ni gagnant ni perdant.

On considère également les trois évènements

A : «le joueur gagne», B :«le joueur perd», C :«le jeu ne s'arrête jamais» (i.e. le joueur ne perd jamais et ne gagne jamais)

1. Donner la loi des variables X, Y et Z ainsi que leurs espérances et variances respectives.
2. Calculer la probabilité que le joueur gagne en au plus 4 tirages.
3. Calculer la probabilité que le joueur perde en au plus 4 tirages.
4. Calculer la probabilité que le joueur n'ait ni gagné, ni perdu à l'issue des 4 premiers tirages.
5. (a) Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(R = n) = \left(\frac{2}{7}\right)^{n-1} \frac{4}{7}$ et donner son espérance.
   (b) En déduire $P(R = 0)$.
   (c) Calculer l'espérance de R.
6. (a) Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(S = n) = \left(\frac{2}{7}\right)^{n-1} \frac{1}{7}$ et donner son espérance.
   (b) Calculer l'espérance de S.
7. Calculer la probabilité $p(A)$ que le joueur gagne (en un nombre quelconque de tirages)
8. Calculer la probabilité $p(B)$ que le joueur perde (en un nombre quelconque de tirages)
9. Calculer la probabilité $p(C)$ que le jeu ne s'arrête jamais.

Exercice 11.4 (**) :(solution ►)

Soit n un entier naturel. Une urne contient :

— Une boule numérotée 1.

— Deux boules numérotées 2.

— ....

— n boules numérotées n.

1. **Epreuve 1.**

   On tire une boule dans cette urne, on note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue.

   (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

   (b) Déterminer le nombre total de boules dans l'urne.

   (c) Déterminer la loi de X et vérifier en particulier que $P(X = n) = \frac{2}{n+1}$.

   (d) On rappelle que pour tout entier naturel n non nul : $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

   Calculer l'espérance de X en fonction de n.

2. **Epreuve 2**.

   On tire maintenant 10 fois une boule avec remise de cette urne et on note Y la variable aléatoire représentant le nombre de fois où on a obtenu une boule numérotée n.

   (a) Reconnaître la loi de Y.

   (b) Donner l'espérance et la variance de Y.

3. **Epreuve 3.**

   On tire maintenant une infinité de fois une boule avec remise de cette urne et on note Z la variable aléatoire représentant le numéro du tirage où on a obtenu une boule numérotée n pour la première fois.

   (a) Reconnaître la loi de Y.

   (b) Donner l'espérance et la variance de Y.

Chapitre 12

Variables aléatoires à densité

12.1 Résumé de cours

1. **Densité** : Soit X une VAR définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et F_X sa fonction de répartition.
   On dit que X est **une variable aléatoire réelle à densité** s'il existe une fonction $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant :
   (a) f_X est à valeur réelles positives ou nulles
   (b) f_X est continue sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en un nombre fini de points
   (c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$

   La fonction f_X s'appelle alors **une densité** de la variable aléatoire X.
   Si X est une variable aléatoire à densité alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\,dt$ est convergente et
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\,dt = 1$$
2. La fonction f_X n'est pas unique ; toute autre fonction égale à f_X sauf en un nombre fini de points est aussi une densité de X.
3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant :
   (a) f est à valeur réelles positives ou nulles
   (b) f est continue sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en un nombre fini de points
   (c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$

   alors f est une densité de la variable X. On dit alors que f est une **densité de probabilité**.
4. **Caractérisation par la fonction de répartition** :
   Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F_X telle que :
   (a) F est continue sur $\mathbb{R}$
   (b) F est $\mathbb{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points

   alors X est une variable aléatoire à densité. De plus si f est une fonction positive ou nulle telle que $F'(x) = f(x)$ en tout point x où F est dérivable, alors f est une densité de X.
5. Soit F une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :
   — F est continue sur $\mathbb{R}$
   — F est de classe $\mathbb{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points
   — F est croissante sur $\mathbb{R}$.
   — $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$

alors F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X à densité.

De plus une densité de X est donné par la dérivée de F en tout point x où F est dérivable.

6. Une conséquence importante est que dans le cas où la fonction de répartition F_X est <u>continue sur $\mathbb{R}$</u> on a par définition de la continuité $\lim\limits_{t\to x^-} F_X(t) = F_X(x)$ ce qui donne finalement $\boxed{P(X=x)=0}$

7. **Propriétés** :
   - $\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2, \quad P(a<X\leq b) = F_X(b) - F_X(a)$
   - $\forall x\in\mathbb{R}, \quad P(X>x) = 1 - F_X(x)$
   - $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = 0 \qquad \lim\limits_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$

8. **Application au calcul de probabilités** :

   Soit X une variable aléatoire admettant une densité f.

   ❶ $\forall x\in\mathbb{R}$, $P(X=x)=0$.

   ❷ $\forall x\in\mathbb{R}$, $P(X<x) = P(X\leqslant x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

   ❸ $\forall x\in\mathbb{R}$, $P(X>x) = P(X\geqslant x) = \displaystyle\int_{x}^{+\infty} f(t)\,dt = 1 - F_X(x)$

   ❹ Pour tout a et b réels tels que $a\leqslant b$:

   $$P(a<X<b) = P(a\leqslant X<b) = P(a<X\leqslant b) = P(a\leqslant X\leqslant b) = \int_a^b f(t)\,dt$$

9. La probabilité de l'événement $[a\leqslant X\leqslant b]$ apparait comme l'aire de la partie du plan située en dessous de la courbe représentative de f, au dessus de l'axe des abscisse et entre les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.

10. **Espérance** :

    Soit X une VAR à densité et f_X une densité de X.

    Si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,dt$ est absolument convergente alors on dit que X **admet une espérance** que l'on note $E(X)$ et on a :

    $$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,dt$$

11. Si X est une VAR telle que $E(X)=0$ on dit que X **est une variable centrée**.

12. **Linéarité** : Soit X une VAR à densité admettant une espérance. Alors pour tout réels a et b, $aX+b$ admet une espérance et $E(aX+b) = aE(X)+b$.

13. **Théorème de transfert** :

    Soit X une variable aléatoire de densité f_X.

    Soit g une fonction continue sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points. Alors $g(X)$ est une var.

    Si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) f_X(t)dt$ est absolument convergente alors $g(X)$ admet une espérance et

    $$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) f_X(t)dt$$

14. **Moment d'ordre** r :

    Soit $r\in\mathbb{N}^*$. Si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x)\,dx$ est absolument convergente alors on dit que X **admet un moment d'ordre** r, notée $m_r(X)$ et on a

    $$m_r(X) = E(X^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x)\,dx$$

    Le moment d'ordre 1 de X est tout simplement l'espérance de X.

15. **Variance et écart-type** :

    Si la variable aléatoire X admet une espérance et si la variable $(X - E(X))^2$ admet une espérance, on appelle **variance de** X le réel

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$$

16. Formule de Kœnig-Huygens : $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$
17. Soit X une variable à densité admettant une variance. Alors pour tout réels a et b, $aX + b$ admet une variance et $V(aX + b) = a^2 V(X)$
18. Si X admet une variance alors $V(X) \geqslant 0$. On appelle alors **écart-type** le réel $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$
19. Si X est une variable à densité telle que $\sigma(X) = 1$, on dit que X **est une variable réduite**.
20. Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre deux. Si $E(X) = 0$ et $V(X) = 1$, on dit que la variable X est centrée réduite.
21. Si X admet une espérance et un écart-type non nul, la variable $X^* = \dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est appelée **la variable centrée réduite associée à** X
22. **Loi uniforme** :

    Soient a et b deux réels tels que $a < b$. On dit qu'une variable aléatoire X suit **la loi uniforme sur** $[a;b]$, et on note $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a;b])$, si elle admet pour densité la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a;b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On retiendra aussi le cas particulier de la loi uniforme sur $[0;1]$:

elle admet pour densité la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[a;b]$ est :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } a < x < b \\ 1 & \text{si } x \geqslant b \end{cases}$$

on retiendra aussi le cas particulier de la loi uniforme sur $[0;1]$:

La fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0;1]$ est :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

Soit X une VAR à densité suivant une loi uniforme sur $[a;b]$. Alors X admet une espérance et on a

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

.

La variance est donnée par $\boxed{V(X) = \dfrac{(a-b)^2}{12}}$

23. **Loi exponentielle** :

Soit λ un réel **strictement positif**. On dit qu'une variable aléatoire X suit **la loi exponentielle de paramètre** λ ; notée $\mathscr{E}(\lambda)$, si elle admet pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

La fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ est définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Si X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ alors X admet une espérance et une variance et

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

24. **Loi normale centrée réduite :**

On dit qu'une variable aléatoire X suit **la loi normale centrée réduite** notée $\mathcal{N}(0,1)$ si elle admet pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

On admettra et utilisera dans les calculs $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\, dx = \sqrt{2\pi}$.

Soit Φ la fonction de répartition d'une VAR X suivant la loi $\mathcal{N}[0,1)$. Alors Φ vérifie :

❶ $\forall x \in \mathbb{R} \qquad \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

❷ $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad P(-x \leq X \leq x) = 2\Phi(x) - 1$

Soit X qui suit une loi normale centrée réduite. Alors X admet une espérance et une variance :

$$E(X) = 0 \qquad V(X) = 1$$

25. **Loi normale de Laplace-Gauss :**

Soit m un réel, et σ un réel strictement positif. On dit que X suit **la loi normale de paramètres** (m,σ^2) si elle admet pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m,\sigma^2)$.

Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m,\sigma^2)$ alors X admet une espérance et une variance et :

$$E(X) = m \qquad V(X) = \sigma^2$$

On se remène à l'utilisation de la loi normale centrée réduite par un changement de variable :

X suit une loi normale de paramètres (m,σ^2) si et seulement si $X^* = \dfrac{X-m}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite.

12.2 Méthodes

1. *Pour démontrer qu'une variable X donnée est une variable à densité :*
   il faut trouver sa fonction de répartition et vérifier qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}^1$ sauf peut être en un nombre fini de points.
   Pour trouver la densité de X il suffit de prendre la dérivée de F.
2. *Pour démontrer qu'une fonction f donnée est une densité de probabilité :*
   on montre les 3 points suivants :
   (a) f est à valeur réelles positives ou nulles
   (b) f est continue sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en un nombre fini de points
   (c) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$
   alors f est une densité de la variable X.
3. *Pour démontrer qu'une fonction F donnée est la fonction de répartition d'une variable à densité X :*
   on montre les 4 points suivants :
   — F est continue sur $\mathbb{R}$
   — F est de classe $\mathbb{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points
   — F est croissante sur $\mathbb{R}$.
   — $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$
   alors F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X à densité.

4. *Démontrer qu'une variable dont on a trouvé la fonction de répartition F est à densité* :
   On démontre successivement que :
   (a) F est continue sur $\mathbb{R}$
   (b) F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.

12.3 Exercices

Exercice 12.1 (*) :(solution ►)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

Montrer que c'est une densité de probabilité. X admet-elle une espérance ?

Exercice 12.2 (*) :(solution ►)

Soit X une variable aléatoire dont la fonction de répartition est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Montrer que X est une variable à densité et en déterminer une densité.

Exercice 12.3 (*) :(solution ►)

On considère la fonction F définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable à densité et en déterminer une densité.

Exercice 12.4 (*) :(solution ►)

Soit X une VAR dont une densité f est définie par $f(x) = 0$ si $x < 1$ et $f(x) = \dfrac{2}{x^3}$ si $x \geqslant 1$.
X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer. Même question pour la variance.

Exercice 12.5 (**) :(solution ►)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} f(t) = 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ f(t) = \dfrac{1}{8} & \text{si} \quad 0 \leqslant t \leqslant 4 \\ f(t) = \dfrac{2}{t^2} & \text{si} \quad t > 4 \end{cases}$$

1. Vérifier que f est une densité d'une var X.
2. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. Montrer que la variable aléatoire X n'admet pas d'espérance.
4. Déterminer $P(X > 4)$, $\quad P(3 < X \leqslant 4)$.
5. Résoudre l'équation d'inconnue réelle x : $F(x) = \dfrac{3}{4}$.

Exercice 12.6 (**) :(solution ►)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = e^{1-x} & \text{si } x \geq 1 \\ f(x) = 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$

1. (a) Vérifier que, pour tout réel $A \geq 1$, $\displaystyle\int_1^A f(x)\,dx = 1 - e^{1-A}$.
   (b) Montrer que f est une densité. On note X une variable aléatoire réelle de densité f.
2. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. On considère la variable aléatoire $Y = X - 1$.
   (a) Montrer que la fonction de répartition F_Y de Y est définie par :

   $$\begin{cases} F_Y(y) = 1 - e^{-y} & \text{si } y \geq 0 \\ F_Y(y) = 0 & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

   (b) En déduire que Y est une variable à densité qui suit une loi classique dont on précisera le paramètre. Préciser son espérance et sa variance.
   (c) En déduire l'espérance et la variance de X.

Chapitre 13

Solutions

Solution de l'exercice 1.1 : (énoncé ►)

1. $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   or pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3 on a $A^n = A^{n-3}A^3 = A^{n-3} \times (0)$ donc pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3 on a $A^n = 0$

2. $(I - A)(I + A + A^2) = I + A + A^2 - A - A^2 - A^3 = I$, alors $I - A$ est inversible et $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -5 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

3. On trouve $P^2 = I$ alors P est inversible et $P^{-1} = P$.

4. On pose $A' = PAP$, $\quad N = I + A$, $\quad N' = PNP$

   (a) $A'^3 = PAPPAPPAP = PA^3P$ car $P^2 = I$ or $A^3 = 0$ donc $A'^3 = 0$ ainsi pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, $A'^n = 0$.

   (b) $N' = PNP = P(I + A)P = PIP + PAP = I + A'$.

   (c) Les matrices I et A' commutent alors d'après la formule du binôme :

   $$N'^n = (I + A')^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A'^k I^{n-k} = \binom{n}{0} A'^0 I^n + \binom{n}{1} A' I^{n-1} + \binom{n}{2} A'^2 I^{n-2} + 0$$

   $$N'^n = I + nA' + \frac{n(n-1)}{2} PA^2P$$

   or $A' = PAP = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ puis on trouve $A'^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   Ainsi $N'^n = \begin{pmatrix} 1 & -n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   $$N^n = PN'^nP = \begin{pmatrix} 1 + \frac{n(n+3)}{2} & \frac{n(n+1)}{2} & \frac{n(n-1)}{2} \\ -n(n+6) & 1 - n(n+4) & -n(n+2) \\ \frac{n(n+1)}{2} & \frac{n(n-1)}{2} & 1 + \frac{n(n-3)}{2} \end{pmatrix}.$$

Solution de l'exercice 1.2 : (énoncé ►)

1. On vérifie aisemment que : $L \cdot M = M \cdot L = 0_{3,3}$.

2. $L^2 = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3L$.

   $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & -3 \\ 3 & -6 & 3 \end{pmatrix} = 3M$.

   On montre par récurrence cette formule pour n entier naturel :

   - initialisation : la propriété est vraie au rang 1 : $\begin{cases} L^1 = 3^{1-1} \cdot L = L \\ M^1 = 3^{1-1} \cdot M = M \end{cases}$
   - on suppose que la propriété est vraie à un certain rang n et on doit montrer qu'elle est vraie au rang $n+1$ c'est à dire que $L^{n+1} = 3^n$ et $LM^{n+1} = 3^n \cdot M$

     or $\begin{cases} L^{n+1} = L \cdot L^n = L \cdot 3^{n-1} \cdot L \\ M^{n+1} = M \cdot M^n = M \cdot 3^{n-1} \cdot M \end{cases}$ d'aprés l'hypothèse de récurrence.

     Donc $\begin{cases} L^{n+1} = 3^{n-1} \cdot L^2 = 3^{n-1} \cdot 3 \cdot L = 3^n \cdot L \\ M^{n+1} = 3^{n-1} \cdot M^2 = 3^{n-1} \cdot 3 \cdot M = 3^n \cdot M \end{cases}$
   - la propriété est héréditaire et vérifiée au rang 1 donc elle est vraie pour tout entier naturel n.

3. On remarque que: $L - M = A$.

   Donc $A^2 = (L-M) \cdot (L-M) = L^2 - ML - LM + M^2 = L^2 + M^2 = 3 \cdot (L+M)$ d'aprés la question précédente.

   On montre par récurrence cette formule pour n entier naturel :

   - initialisation : la propriété est vraie au rang 1 : $A^1 = 3^{1-1} \cdot [L + (-1)^1 M] = L - M$
   - on suppose que la propriété est vraie à un certain rang n et on doit montrer qu'elle est vraie au rang $n+1$ c'est à dire que $A^{n+1} = 3^n \cdot [L + (-1)^{n+1} M]$

     or

     $$\begin{aligned} A^{n+1} &= A \cdot A^n \\ &= (L-M) \cdot (3^{n-1} \cdot [L + (-1)^n M]) \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= 3^{n-1} \cdot (L^2 - ML - (-1)^n LM + (-1)^n M^2) \\ &= 3^{n-1} \cdot (L^2 - (-1)^n M^2) \quad \text{car } LM = ML = 0 \\ &= 3^{n-1} \cdot (3L + 3(-1)^{n+1} M) \quad \text{car } L^2 = L \text{ et } M^2 = M \\ &= 3^n \cdot (L + (-1)^{n+1} M) \end{aligned}$$
   - la propriété est héréditaire et vérifiée au rang 1 donc elle est vraie pour tout entier naturel n.

4. On pose $C = \dfrac{1}{9} A$

$$\begin{aligned}
X = CX + B \quad &\Leftrightarrow \quad (I - C)X = B \quad (\times 9)\\
&\Leftrightarrow \quad (9I - A)X = 9B\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ - & 11 & -1 \\ 3 & -3 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -13 \\ 15 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrcr} 7x & +y & +z & = & 7 \\ -x & +11y & -z & = & -13 \\ 3x & -3y & +9z & = & 15 \end{array} \right.\\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrcrl} -x & +11y & -z & = & -13 & L_1 \leftrightarrow L_2 \\ 7x & +y & +z & = & 7 & L_2 \leftrightarrow L_1 \\ 3x & -3y & +9z & = & 15 & \end{array} \right.\\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrcrl} -x & +11y & -z & = & -13 & \\ \cdot & 78y & -6z & = & -84 & L_2 \leftarrow L_2 + 7L_1 \\ \cdot & 30y & +6z & = & -24 & L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \end{array} \right.\\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrcrl} -x & +11y & -z & = & -13 & \\ \cdot & 13y & -z & = & -14 & L_2 \leftarrow L_2/6 \\ \cdot & 5y & +z & = & -4 & L_3 \leftarrow L_3/6 \end{array} \right.\\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrcrl} -x & +11y & -z & = & -13 & \\ \cdot & 13y & -z & = & -14 & \\ \cdot & \cdot & 18z & = & 18 & L_3 \leftarrow 13L_3 - 5L2 \end{array} \right.\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Ce système admet donc une unique solution:$X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5. (a) On a donc: $\left\{ \begin{array}{l} X = CX + B \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad U_{n+1} = CU_n + B \end{array} \right.$.

   $L_2 - L_1 \Rightarrow U_{n+1} - X = C(U_n - X)$.

   Ainsi: $\forall n \in \mathbb{N}, \quad V_{n+1} = C \cdot V_n$d'où : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad Vn = C^n \cdot V_0$.

   cad:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n = X + C^n \cdot (U_0 - X)$$

   Or:

$$C^n = (\frac{1}{9}A)^n = \frac{1}{3^{2n}} \cdot 3^{n-1} \cdot (L + (-1)^n M) = \frac{1}{3^{n+1}} L + \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} M$$

   Donc $C^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0_3 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

   Ainsi, $U_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

Solution de l'exercice 2.1 : (énoncé ►)

On résout l'équation $x = \frac{1}{3}x + 4$: on trouve $x = 6$

On pose $v_n = u_n - 6$.
$v_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4 - 6 = \frac{1}{3}u_n - 2 = \frac{1}{3}(u_n - 6) = \frac{1}{3}v_n + 4$. La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = 3 - 6 = -3$.

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{1}{3}(-3)^n$ d'où $u_n = v_n + 6 = \dfrac{1}{3}(-3)^n + 6$

Solution de l'exercice 2.2 : (énoncé ►)

$\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq (-1)^n \leq 1$ donc en multipliant par $\dfrac{1}{n}$ qui est stricement positif on obtient $\dfrac{-1}{n} \leq u_n \leq \dfrac{1}{n}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-1}{n} = 0$ donc d'après le théorème d'encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

Remarque : on aurait pu plus simplement travailler avec $|u_n| = \dfrac{1}{n}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = 0$ qui donne $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

Solution de l'exercice 2.3 : (énoncé ►)

1. On montre par récurrence cette formule pour n entier naturel :
   - initialisation : la propriété est vraie au rang 0 : $0 < u_0 = \dfrac{1}{2} < 1$
   - on suppose que la propriété est vraie à un certain rang n et on doit montrer qu'elle est vraie au rang n+1 c'est à dire que $0 < u_{n+1} < 1$
     or $0 < u_n < 1$ et donc $-1 < -u_n < 0$ d'où $1 < 2 - u_n < 2$
     par produit de quantités positives on en déduit $0 < u_n(2 - u_n) < 1$
   - la propriété est héréditaire et vérifiée au rang 0 donc elle est vraie pour tout entier naturel n.

   Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < 1$.
2. On peut démontrer le résultat par récurrence ou remarquer que $u_{n+1} = 2u_n - u_n^2$ donc $u_{n+1} - u_n = u_n - u_n^2 = u_n(1 - u_n) > 0$ car $u_n > 0$ et $1 - u_n > 0$

   La suite est croissante.
3. La suite est croissante et majorée par 1 donc converge vers un réel ℓ solution de l'équation $x = x(2 - x)$

   $x = x(2-x) \Leftrightarrow x = 2x - x^2 \Leftrightarrow x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(1-x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$

   or la suite est croissante et $u_0 = 1/2$ donc la valeur 0 est impossible.

   Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$
4. (a) Pour tout entier n, $v_{n+1} = 1 - u_{n+1} = 1 - u_n(2 - u_n) = 1 - 2u_n + u_n^2 = (1 - u_n)^2 = v_n^2$.

   (b) On a donc $v_1 = v_0^2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2$

   $v_2 = v_1^2 = \left(\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\right)^2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^4$

   On va démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $v_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2^n}$

   On montre par récurrence cette formule pour n entier naturel :
   - initialisation : la propriété est vraie au rang 1 : $v_0 = \left(\dfrac{1}{2}\right) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2^0}$ car $2^0 = 1$
   - on suppose que la propriété est vraie à un certain rang n et on doit montrer qu'elle est vraie au rang n+1 c'est à dire que $v_{n+1} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2^{n+1}}$

     or $v_{n+1} = v_n^2 = \left(\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2^n}\right)^2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2^n\times 2} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2^{n+1}}$
   - la propriété est héréditaire et vérifiée au rang 1 donc elle est vraie pour tout entier naturel n.

(c) $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$ car $\frac{1}{2} \in]-1;1[$.
Or $u_n = 1 - v_n$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Solution de l'exercice 2.4 : (énoncé ►)

1. On montre par récurrence cette formule pour n entier naturel :
   - initialisation : la propriété est vraie au rang 0 : $u_0 > 0$ d'après l'énoncé
   - on suppose que la propriété est vraie à un certain rang n et on doit montrer qu'elle est vraie au rang $n+1$ c'est à dire que $u_{n+1} > 0$
     or une racine d'un réel strictement positif est strictement positive donc $u_{n+1} > 0$
   - la propriété est héréditaire et vérifiée au rang 0 donc elle est vraie pour tout entier naturel n.
2. $t_{n+1} = \ln u_{n+1} = \ln e + \ln \sqrt{u_n} = 1 + \frac{1}{2}\ln u_n = 1 + \frac{1}{2}t_n$
3. On résout $\ell = 1 + \frac{1}{2}\ell \Leftrightarrow \ell = 2$
   On pose $v_n = t_n - 2$
   $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = t_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}(v_n + 2) = \frac{1}{2}v_n$
   (v_n) est une suite géométrique de raison 2 donc $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n v_0$
   donc $t_n = 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^n (\ln u_0 - 2)$ puis $u_n = exp\left[2 + \left(\frac{1}{2}\right)^n (\ln u_0 - 2)\right]$
   puisque $\frac{1}{2} \in]-1;1[$, $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = e^2$

Solution de l'exercice 2.5 : (énoncé ►)

1. On procède par récurrence en posant (P_n) : $u_n > 0$ et $u_{n+1} > 0$
   Initialisation $n = 0$:d'près l'énoncé, on a $u_0 > 0$ et $u_1 > 0$ donc (P_0) est vraie.
   Hérédité : Supposons (P_n) vraie et montrons (P_{n+1}),c'est-à-dire que $(u_{n+1} > 0$ et $u_{n+2} > 0)$.
   D'après l'hypothèse (P_n), on sait que $u_{n+1} > 0$ et puisque $u_{n+2} = p u_n u_{n+1}$ est la racine d'un produit de deux réels strictement positif, il est immédiat que $u_{n+2} > 0$; ce qui démontre (P_{n+1}) et achève la récurrence.
2. $w_{n+2} = \ln u_{n+2} = \frac{1}{2}\ln u_n + \frac{1}{2}\ln u_{n+1} = \frac{1}{2}w_n + \frac{1}{2}w_{n+1}$
3. Equation caractéristique : $x^2 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$
   On trouve 2 solutions : $\frac{-1}{2}$ et 1
   Ainsi il existe 2 réels a et b tels que $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = a(1)^n + b\left(\frac{-1}{2}\right)^n$
   On détermine ensuite a et b grâce aux premiers termes :
   $$\begin{cases} a(1)^0 + b\left(\frac{-1}{2}\right)^0 = w_0 = 0 \\ a(1)^1 + b\left(\frac{-1}{2}\right)^1 = w_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ a - \frac{1}{2}b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = -\frac{4}{3} \end{cases}$$
   $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \frac{2}{3} - \frac{4}{3}\left(\frac{-1}{2}\right)^n$
   puis $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{-1}{2}\right)^n = 0$ car $\left(\frac{-1}{2}\right) \in]-1;1[$ donc $\lim_{n\to+\infty} w_n = \frac{2}{3}$

4. $u_n = e^{w_n}$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = e^{\frac{2}{3}}$

Solution de l'exercice 2.6 : (énoncé ►)

1. On a $h_p(x) = x - f_p(x) = x - 1 - \ln(x+p)$.
   h_p est dérivable sur $]-p, +\infty[$ et $h_p'(x) = 1 - \dfrac{1}{x+p} = \dfrac{x+p-1}{x+p}$ et comme $p \geq 1$, $h_p' > 0$ sur $]0, +\infty[$
   En $+\infty$: $h_p(x) = x - 1 - \ln(x+p) = x - 1 - \ln(x(1+p/x)) = x\left(1 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{\ln(x)}{x} - \dfrac{\ln(1+p/x)}{x}\right) \to +\infty$
   Donc h_p est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$, donc réalise une bijection
   de $]0, +\infty[$ dans $\left]\lim\limits_{0} h_p, \lim\limits_{+\infty} h_p\right[=]-1-\ln p; +\infty[$.
   Et comme 0 appartient à cet intervalle, l'équation $h_p(x) = 0$ a une unique solution α_p sur $]0, +\infty[$.
   Conclusion : $\boxed{\text{l'équation } f_p(x) = x \text{ admet une unique solution } \alpha_p \text{ sur }]0, +\infty[}$
2. On a $f_{p+1}(x) = 1 + \ln(x+p+1)$
   par ailleurs par définition de la suite (α_p) $f_{p+1}(\alpha_{p+1}) = \alpha_{p+1}$ or $f_{p+1}(\alpha_{p+1}) = 1 + \ln(\alpha_{p+1}+p+1)$ donc $\alpha_{p+1} = 1 + \ln(\alpha_{p+1}+p+1)$
   et $h_p(\alpha_{p+1}) = \alpha_{p+1} - 1 - \ln(\alpha_{p+1}+p) = \ln(\alpha_{p+1}+p+1) - \ln(\alpha_{p+1}+p)$.
   Et comme $\alpha_{p+1}+p+1 > \alpha_{p+1}+p$ alors $\ln(\alpha_{p+1}+p+1) > \ln(\alpha_{p+1}+p)$ et
   Conclusion : $\boxed{h_p(\alpha_{p+1}) > 0}$
   On a donc $h_p(\alpha_{p+1}) > 0 = h_p(\alpha_p)$ et comme la fonction h_p est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et que α_p et α_{p+1} en sont éléments, $\alpha_{p+1} > \alpha_p$.
   Conclusion : $\boxed{\text{la suite } (\alpha_p)_{p \in \mathbb{N}^*} \text{ est donc croissante.}}$
3. On compare les images par h_p :
   $h_p(\alpha_p) = 0$ et $h_p(1+\ln(p)) = 1 + \ln(p) - 1 - \ln(p+1+\ln(p)) = \ln(p) - \ln(p+1+\ln(p))$
   et comme $p+1+\ln(p) > p$ alors $\ln(p) < \ln(p+1+\ln(p))$ et $h_p(1+\ln(p)) < 0 = h_p(\alpha_p)$.
   Donc (h_p strictement croissante)
   Conclusion : $\boxed{\alpha_p \geq 1 + \ln(p)}$ et par minoration,
   Conclusion : $\boxed{\text{quand } p \to +\infty : \alpha_p \to \infty}$

Solution de l'exercice 3.1 : (énoncé ►)

1. $\forall x \in \mathbb{R}, |-x| = |x|$ donc $f(-x) = -xe^{-|x|} = -f(x)$ ainsi f est impaire.
2. $\forall x \in [; +\infty[, f(x) = xe^{-x} = \dfrac{x}{e^x}$ et d'après les formules de croissances comparées, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$
3. f est dérivable sur $]0; +\infty[$ en tant que exponentielle d'une fonction dérivable sur $]0; +\infty[$ et
   $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = 1e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$
   or $\forall x \in]0; +\infty[, e^{-x} > 0$ et $1 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$ d'où $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$
   par ailleurs $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} e^{-x} = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} e^{x} = 1$ donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$
   Enfin puisque f est impaire, on déduit les variations sur $]-\infty; 0[$ de celles sur $]0; +\infty[$ (la courbe est symétrique par rapport à l'origine).

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

Solution de l'exercice 3.2 : (énoncé ►)

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-x=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{3x}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.
2. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables et pour tout x réel,
   $f'(x)=-\mathrm{e}^{3x}+3(1-x)\mathrm{e}^{3x}=(3-3x-1)\mathrm{e}^{3x}=(2-3x)\mathrm{e}^{3x}$.
3. $f'(x)\geqslant 0 \Leftrightarrow (2-3x)\mathrm{e}^{3x}\geqslant 2-3x\geqslant 0 \Leftrightarrow 2\geqslant 3x \Leftrightarrow \frac{2}{3}\geqslant x$
4.

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{1}{3}\mathrm{e}^2$	$\searrow$	$-\infty$

5. $I=\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}(1-x)\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x=\left[\frac{(1-x)\mathrm{e}^{3x}}{3}\right]_{-1}^{1}+\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{e}^{3x}}{3}\,\mathrm{d}x=0-2\mathrm{e}^{-3}+\left[\frac{\mathrm{e}^{3x}}{9}\right]_{-1}^{1}$
   $=-2\mathrm{e}^{-3}+\frac{\mathrm{e}^{3}}{9}-\frac{\mathrm{e}^{-3}}{9}=\frac{\mathrm{e}^{3}-7\mathrm{e}^{-3}}{9}$.

Solution de l'exercice 3.3 : (énoncé ►)

1. $f(x)=\frac{1}{2}\left[x+(1-x)\mathrm{e}^{2x}\right]$
   On a (croissance comparées) $\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^{2x}=0$, d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.
   $f(x)=\frac{1}{2}(x\mathrm{e}^{-2x}+1-x)$; la limite de $x\mathrm{e}^{-2x}$ en $+\infty$ est égale à 0 et $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-2x}=-\infty$.
   Conclusion : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.
2. $x\mapsto x$, $x\mapsto(1-x)$ et $x\mapsto \mathrm{e}^{2x}$ sont des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc f fonction obtenue par somme et produit de ces fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est dé ?rivable sur $\mathbb{R}$.
   $f'(x)=\frac{1}{2}x+\left(\frac{1-x}{2}\right)\mathrm{e}^{2x}$; $f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+2\mathrm{e}^{2x}\left(\frac{1-x}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}(1-2x)=\frac{1}{2}\left[1+(1-2x)\mathrm{e}^{2x}\right]$.
3. $u(x)=1+(1-2x)\mathrm{e}^{2x}$
   (a) $u'(x)-2\mathrm{e}^{2x}+2(1-x)\mathrm{e}^{2x}=-4x\mathrm{e}^{2x}$ qui est du signe de $-x$. D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$u'(x)$		$+$			$-$		
$u(x)$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

(b) On a $u(0) = 1 + 1 = 2$ et $u(1) = 1 - \mathrm{e} < 0$. Donc sur l'intervalle $[0\,;\,1]$, la fonction u est : dé ?rivable ; monotone dé ?croissante ; $u(0) > 0$ et $u(1) < 0$.

Conclusion : il existe un réel unique α de l'intervalle $[0\,;\,1]$ tel que $u(\alpha) = 0$.

(c) Le tableau donne donc le signe de u : $x < \alpha \iff u(x) > 0$ et $x > \alpha \iff u(x) < 0$

4. On a $f'(x) = \dfrac{1}{2}u(x)$: le signe de f' est celui de u. On a donc le tableau de variations :

x	$-\infty$		α		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$			$-$		
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$		$\searrow$		$-\infty$

Solution de l'exercice 3.4 : (énoncé ►)

1. Pour que $\ln x$ existe, il est indispensable d'exiger que $x > 0$ et, pour que le quotient existe, il faut exiger que $\ln x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq e^0 = 1$. Par conséquent, le domaine de définition de f est $\mathcal{D}_f =]0, +\infty[\setminus\{1\} =]0,1[\cup]1,+\infty[$.

2. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x(\ln x)^{-1} \underset{f<0 \text{ en } 0^+}{=} -\lim\limits_{x\to 0} x = 0.$
On en déduit que la fonction f se prolonge par continuité en 0 en posant

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\ln x} & \text{si} \quad x > 0 \text{ et } x \neq 1 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

3. La fonction f est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathcal{D}_f =]0, +\infty[\setminus\{1\}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathcal{D}_f$ (cf. question 1) donc f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et sa dérivée est donnée par :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f =]0,+\infty[\setminus\{1\}, \quad f'(x) = \frac{1(\ln x) - x\left(\dfrac{1}{x}\right)}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$$

4. Le signe de $f'(x)$ est celui de $\ln x - 1$ et comme l'on a $\ln x - 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > 1 \Leftrightarrow x > e^1 = e$, on en déduit le tableau de variation de f

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\Vert$ 0	$\searrow$	$-\infty$ $\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

Justification des limites :
En 0^+ et en $+\infty$, cela découle de l'égalité $\lim\limits_{x\to+\infty \text{ (resp. } 0^+)} x(\ln x)^{-1} = \lim\limits_{x\to+\infty \text{ (resp. } 0^+)} \ln x.$
En 1^-, le numérateur x est positif et tend vers 1, le dénominateur est négatif et tend vers 0 donc le quotient est négatif et tend vers $-\infty$ ("$\dfrac{1}{0^-} = -\infty$").
En 1^+, le numérateur x est positif et tend vers 1, le dénominateur est positif et tend vers 0 donc le quotient est positif et tend vers $+\infty$ ("$\dfrac{1}{0^+} = +\infty$")

5. La fonction f est continue sur $]e, +\infty[$ comme quotient de deux fonctions continues sur cet intervalle dont le dénominateur ne s'annule pas sur cet intervalle. En outre, la combinaison des questions 3 et 4, montre que la dérivée de f est strictement positive sur $]e, +\infty[$ donc la fonction f est strictement croissante sur cet intervalle. Les deux conditions du théorème de bijection étant valides, on en déduit que f réalise une bijection de $]e, +\infty[$ sur $f(]e, +\infty[) =]e, +\infty[$.

Solution de l'exercice 4.1 : (énoncé ►)

1. $f(x) = \dfrac{x\left(x+2+\frac{3}{x}\right)}{x(1+\frac{2}{x})} = \dfrac{x+2+\frac{3}{x}}{1+\frac{2}{x}}$

   $\lim\limits_{x\to+\infty} x+2+\dfrac{3}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{2}{x} = 1$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2. Pour tout $x \neq -2$, $ax+b+\dfrac{c}{x+2} = \dfrac{ax^2+(2a+b)x+2b+c}{x+2}$

   Par identification des constantes du polynôme au numératuer avec celui de $f(x)$ il vient : $\begin{cases} a=1 \\ 2a+b=2 \\ 2b+c=3 \end{cases} \Leftrightarrow$
   $\begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=3 \end{cases}$

3. On peut mettre $f(x)$ sous la forme $f(x) = x + h(x)$ avec $h(x) = \dfrac{3}{x+2}$

   Pour tout réel $x \in]-2; +\infty[$, $x+2>0$ alors $h(x)>0$ donc la courbe est au-dessus de D.

Solution de l'exercice 4.2 : (énoncé ►)

On a $f(0) = 0^2+2 = 2$ et $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x+2 = 2 = f(0)$
alors f est continue en 0.

Solution de l'exercice 4.3 : (énoncé ►)

Sur chacun des intervalles $]-\infty, -1[$, $[-1, 2]$, $]2, +\infty[$, la fonction e est égale à une fonction continue sur $\mathbb{R}$ donc la fonction e est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{-1, 2\}$ (ne pas oublier d'enlever les points "collant" à deux intervalles consécutifs).
Etude de la continuité en -1 : La fonction e possédant deux expressions distinctes selon que l'on se trouve à gauche ou à droite de 1, nous allons utiliser les limites gauche et droite

$$\lim_{x\to-1^-} e(x) = \lim_{x\to-1^-} 0 = 0 \qquad \lim_{x\to-1^+} e(x) = \lim_{x\to-1^+} (x+1) = -1+1 = 0$$

donc les limites gauche et droite en -1 sont égales, ce qui implique que $\lim\limits_{x\to-1} e(x)$ existe et vaut 0. D'autre part, $e(-1) = -1+1 = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-1} e(x) = e(-1)$, ce qui implique la continuité de e en -1.
Etude de la continuité en 2 :

$$\lim_{x\to2^-} e(x) = \lim_{x\to2^-} (x+1) = 2+1 = 3 \qquad \lim_{x\to2^+} e(x) = \lim_{x\to2^+} 3 = 3$$

donc les limites gauche et droite en 2 sont égales, ce qui implique que $\lim\limits_{x\to2} e(x)$ existe et vaut 3. D'autre part, $e(2) = 3$ donc $\lim\limits_{x\to2} e(x) = e(2)$, ce qui implique la continuité de e en 2.
En conclusion, on peut affirmer que la fonction e est continue sur $\mathbb{R}$ (ce que le graphique semblait nous indiquer).

$\boxed{\text{Etude la fonction } f}$ Sur chacun des intervalles $]-\infty, 0]$, $]0, 1[$, $[1, +\infty[$, la fonction f est égale à une fonction continue sur $\mathbb{R}$ donc la fonction f est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$ (ne pas oublier d'enlever les points "collant" à deux intervalles consécutifs).

Etude de la continuité en 0 :

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 0 = 0 \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} x = 0$$

donc les limites gauche et droite en 0^+ sont égales, ce qui implique que $\lim_{x\to 0} f(x)$ existe et vaut 0. D'autre part, $f(0) = 0$ donc $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$, ce qui implique la continuité de f en 0.

Etude de la continuité en 1 :

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x\ln x = 1\times\ln 1 = 0 \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x} = 1$$

donc les limites gauche et droite en 2 sont distinctes, ce qui implique que la fonction f n'admet pas de limite en 1, ce qui interdit la continuité de f en 1 (pour la continuité, la limite doit exister!!!!! pour être égale à ..).

En conclusion, on peut affirmer que la fonction f est continue uniquement sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ (ce que le graphique semblait nous indiquer).

$$e : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -1 \\ x+1 & \text{si} \quad -1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 3 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases} \qquad f : x \mapsto \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \\ x\ln x & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ 1/x & \text{si} \quad x \geqslant 1 \end{cases}$$

Solution de l'exercice 4.4 : (énoncé ►)

1. La fonction $g : x \mapsto x^3 - 3x + 1$ est continue sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ (c'est un polynôme), dérivable sur cet intervalle (c'est un polynôme) et sa dérivée vaut $g'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$ qui est strictement négative sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Par conséquent, la fonction g est strictement décroissante et continue sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ donc elle réalise une bijection de $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ sur $f\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) = \left[-\frac{3}{8}, 1\right]$.
   Puisque $0 \in \left[-\frac{3}{8}, 1\right]$, l'équation $g(x) = 0$ admet une et une seule solution sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ (existence et unicité de l'antécédent de 0 par g dans l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right]$).
2. $\dfrac{x^3 + 6x + 1}{9} = x \Leftrightarrow x^3 + 6x + 1 = 9x \Leftrightarrow x^3 - 3x + 1 = 0$
   Par conséquent, les solutions de l'équation $f(x) = x$ sont exactement les solutions de l'équation $g(x) = 0$. Comme cette dernière équation admet comme unique solution α sur l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, on en déduit que α est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ dans l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.
3. On considère la fonction $h : x \mapsto f(x) - x = \dfrac{x^3 + 6x + 1}{9} - x = \dfrac{x^3 - 3x + 1}{9} = \dfrac{g(x)}{9}$.
   La fonction g étant strictement décroissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ (question 1) donc sur $[0, \alpha]$. Comme $h(0) = \dfrac{g(0)}{9} = \dfrac{1}{9}$ et $h(\alpha) = \dfrac{g(\alpha)}{9} = 0$ (car α solution de l'équation $g(x) = 0$), on en déduit que la fonction h est positive sur $[0, \alpha]$, c'est-à-dire que $\forall x \in [0, \alpha], \quad f(x) \geqslant x$.
4. On pose $(\mathscr{P}_n) : 0 \leqslant u_n \leqslant \alpha$.
   Initialisation $n = 0$: $u_0 = 0$ et $\alpha \geqslant 0$ donc $0 \leqslant u_0 \leqslant \alpha$, ce qui montre que $(\mathscr{P}_0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons $(\mathscr{P}_n)$ vraie et montrons $(\mathscr{P}_{n+1})$, c'est-à-dire supposons que $0 \leqslant u_n \leqslant \alpha$ et montrons que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$

$$0 \leqslant u_n \leqslant \alpha \Rightarrow \frac{1}{9} \leqslant \underbrace{\frac{(u_n)^3+6u_n+1}{9}}_{=u_{n+1}} \leqslant \frac{\alpha^3+6\alpha+1}{9} = \alpha \quad (\alpha \text{ est solution de } f(x)=x) \Rightarrow 0 \leqslant \frac{1}{0} \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$$

ce qui démontre $(\mathscr{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

5. Puisque l'on a $\forall x \in [0,\alpha], \quad f(x) \geqslant x$, en choisissant $x = u_n$ (ce qui est licite car $u_n \in [0,\alpha]$), on obtient $\underbrace{f(u_n)}_{=u_{n+1}} \geqslant u_n \Leftrightarrow u_{n+1} \geqslant u_n$.
6. La suite u est majorée par α (question 4) et croissante (question 5) donc elle converge et sa limite L vérifie $0 \leqslant L \leqslant \alpha$.
   Calcul de la limite : Puisque la fonction f est continue sur $[0,\alpha]$, en passant à limite dans l'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$, on a $L = f(L)$. Donc L est solution de l'équation $f(x) = x$. Comme $0 \leqslant L \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{2}$, la limite L est une solution sur l'intervalle $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ de l'équation $f(x) = x$. La question 2 montre que la seule solution de cette équation sur cet intervalle est α donc $L = \alpha$ et la suite u converge vers α.

Solution de l'exercice 5.1 : (énoncé ►)

1. On pose D_k : "obtenir k boules noires ".

$$P(D_2) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{1}{10}, P(D_1) = \frac{\binom{2}{1}\times\binom{3}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{6}{10} \text{ et } P(D_0) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{3}{10}$$

2. On pose E_k : "obtenir k boules noires ".

$$P(E_1) = \frac{\binom{1}{1}\times\binom{4}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{4}{10} \text{ et } P(E_0) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{6}{10}.$$

3. (a) A_1 signifie que l'on a pioché aucune boule noire dans l'urne U_0 donc $P(A_1) = P(D_0) = \frac{3}{10}$.
   B_1 signifie que l'on a pioché une boule noire dans l'urne U_0 donc $P(B_1) = P(D_1) = \frac{6}{10}$.
   C_1 signifie que l'on a pioché deux boules noires dans l'urne U_0 donc $P(C_1) = P(D_2) = \frac{1}{10}$.
   (b) On considère le système complet d'évènements (A_1, B_1, C_1). La formule des probabilités totales nous donne

$$\begin{aligned} P(A_2) &= P(A_1 \cap A_2) + P(B_1 \cap A_2) + P(C_1 \cap A_2) \\ &= P(A_1)P_{A_1}(A_2) + P(B_1)P_{B_1}(A_2) + P(C_1)P_{C_1}(A_2) \end{aligned}$$

   — $P_{A_1}(A_2)$ est la probabilité d'avoir aucune boule noire dans l'urne U_2 si il n'y a aucune boule noire dans l'urne U_1 donc $P_{A_1}(A_2) = 1$.
   — $P_{B_1}(A_2)$ est la probabilité d'avoir aucune boule noire dans l'urne U_2 si il y a une boule noire dans l'urne U_1. L'urne U_1 contient donc 5 boules dont 4 blanches et 1 noire (on a ajouté les deux boules piochées précédemment dans U_0) donc $P_{B_1}(A_2) = P(E_0) = \frac{6}{10}$.
   — $P_{C_1}(A_2)$ est la probabilité d'avoir aucune boule noire dans l'urne U_2 si il y a deux boules noires dans l'urne U_1. L'urne U_1 contient donc 5 boules dont 3 blanches et 2 noires donc $P_{C_1}(A_2) = P(D_0) = \frac{3}{10}$

On en déduit que $P(A_2) = \frac{3}{10} \times 1 + \frac{6}{10} \times \frac{6}{10} + \frac{1}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{69}{100}$.

$$\begin{aligned} P(B_2) &= P(A_1 \cap B_2) + P(B_1 \cap B_2) + P(C_1 \cap B_2) \\ &= P(A_1)P_{A_1}(B_2) + P(B_1)P_{B_1}(B_2) + P(C_1)P_{C_1}(B_2) \end{aligned}$$

— $P_{A_1}(B_2)$ est la probabilité d'avoir une boule noire dans l'urne U_2 si il n'y a aucune boule noire dans l'urne U_1 donc $P_{A_1}(B_2) = 0$.
— $P_{B_1}(B_2)$ est la probabilité d'avoir une boule noire dans l'urne U_2 si il y a une boule noire dans l'urne U_1. L'urne U_1 contient donc 5 boules dont 4 blanches et 1 noire (on a ajouté les deux boules piochées précédemment dans U_0) donc $P_{B_1}(B_2) = P(E_1) = \frac{4}{10}$.
— $P_{C_1}(B_2)$ est la probabilité d'obtenir une boule noire dans l'urne U_2 si il y a deux boules noires dans l'urne U_1. L'urne U_1 contient donc 5 boules dont 3 blanches et 2 noires donc $P_{C_1}(B_2) = P(D_1) = \frac{6}{10}$

On en déduit que $P(B_2) = \frac{3}{10} \times 0 + \frac{6}{10} \times \frac{4}{10} + \frac{1}{10} \times \frac{6}{10} = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}$

$$\begin{aligned} P(C_2) &= P(A_1 \cap C_2) + P(B_1 \cap C_2) + P(C_1 \cap C_2) \\ &= P(A_1)P_{A_1}(C_2) + P(B_1)P_{B_1}(C_2) + P(C_1)P_{C_1}(C_2) \end{aligned}$$

— $P_{A_1}(C_2)$ est la probabilité d'avoir deux boules noires dans l'urne U_2 si il n'y a aucune boule noire dans l'urne U_1 donc $P_{A_1}(C_2) = 0$.
— $P_{B_1}(C_2)$ est la probabilité d'avoir deux boules noires dans l'urne U_2 si il y a une boule noire dans l'urne U_1 donc $P_{B_1}(C_2) = 0$.
— $P_{C_1}(C_2)$ est la probabilité d'obtenir deux boules noires dans l'urne U_2 si il y a deux boules noires dans l'urne U_1. L'urne U_1 contient donc 5 boules dont 3 blanches et 2 noires donc $P_{C_1}(C_2) = P(D_2) = \frac{1}{10}$.
On en déduit que $P(C_2) = \frac{3}{10} \times 0 + \frac{6}{10} \times 0 + \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{100}$

(c) (C_k) signifie que l'on a pioché deux boules noires à chaque pioche ce qui nous donne $C_k = C_1 \cap C_2 \cap ... \cap C_k$.

$$\begin{aligned} P(C_k) &= P(C_1 \cap C_2 \cap ... \cap C_k) \\ &= P(C_1)P_{C_1}(C_2)P_{C_1 \cap C_2}(C_3)...P_{C_1 \cap ... \cap C_{k-1}}(C_k) \\ &= \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times ... \times \frac{1}{10} = \frac{1}{10^k} \end{aligned}$$

On peut également écrire, à l'aide du système complet (A_k, B_k, C_k), que

$$\begin{aligned} P(C_{k+1}) &= P(A_k)P_{A_k}(C_{k+1}) + P(B_k)P_{B_k}(C_{k+1}) + P(C_k)P_{C_k}(C_{k+1}) \\ &= \frac{1}{10}P(C_k) \end{aligned}$$

donc la suite $(P(C_k))_{k \geqslant 1}$ est géométrique donc $P(C_k) = (\frac{1}{10})^{k-1}P(C_1) = \frac{1}{10^k}$.

(d) Encore et toujours le système complet d'évènements (A_k, B_k, C_k)

$$\begin{aligned} P(B_{k+1}) &= P(A_k)P_{A_k}(B_{k+1}) + P(B_k)P_{B_k}(B_{k+1}) + P(C_k)P_{C_k}(B_{k+1}) \\ &= \frac{6}{10}P(C_k) + \frac{4}{10}P(B_k) \end{aligned}$$

(e) Récurrons donc. On pose $(\mathscr{H}_n) : P(B_n) = 2 \times (\frac{4}{10})^n - \frac{2}{10^n}$

Initialisation : $P(B_1) = \frac{6}{10}$ et $2 \times (\frac{4}{10})^1 - \frac{2}{10^1} = \frac{6}{5}$ donc $(\mathscr{H}_1)$ est vraie.

Hérédité : suposons $(\mathscr{H}_n)$ vraie i.e. $P(B_n) = 2\times(\frac{4}{10})^n - \frac{2}{10^n}$. La formule de la question précédente montre que

$$\begin{aligned} P(B_{n+1}) &= \frac{6}{10}P(C_n)+\frac{4}{10}P(B_n) = \frac{6}{10}\frac{1}{10^n}+\frac{4}{10}(2\times(\frac{4}{10})^n-\frac{2}{10^n}) \\ &= \frac{1}{10^n}(\frac{6}{10}-\frac{8}{10})+2\times(\frac{4}{10})^{n+1} = 2\times(\frac{4}{10})^{n+1}-\frac{2}{10}\times\frac{1}{10^n} \\ &= 2\times(\frac{4}{10})^{n+1}-\frac{2}{10^{n+1}}. \end{aligned}$$

ce qui démontre $(\mathscr{H}_{n+1})$.

Conclusion : $\forall n \geqslant 1, \quad (\mathscr{H}_n)$ est vraie donc

$$\forall n \geqslant 1, \quad P(B_n) = 2\times(\frac{4}{10})^n - \frac{2}{10^n}$$

Solution de l'exercice 5.2 : (énoncé ►)

1. (a) L'énoncé dit que $p_{\overline{R_n}}(R_{n+1}) = \frac{1}{5}$ et $p_{R_n}(R_{n+1}) = \frac{1}{20}$.

   (b) Par définition :
   $p(R_n \cap R_{n+1}) = p_{R_n}(R_{n+1}) \times p(R_n) = \frac{1}{20}p_n$.
   De même :
   $p\left(\overline{R_n}\cap R_{n+1}\right) = p_{\overline{R_n}}(R_{n+1}) \times p\left(\overline{R_n}\right) = \frac{1}{5}q_n$.

   (c) La loi des probabilités totales permet d'écrire que :
   $p(R_{n+1}) = p(R_n\cap R_{n+1}) + p\left(\overline{R_n}\cap R_{n+1}\right)$ soit :
   $$p_{n+1} = \frac{1}{20}p_n + \frac{1}{5}q_n.$$

   (d) Comme $p_n + q_n = 1$, l'égalité précédente peut s'écrire :
   $p_{n+1} = \frac{1}{20}p_n + \frac{1}{5}\left(1-p_n\right) = \frac{1}{5} - \frac{3}{20}p_n$.

2. (a) Quel que soit l'entier n, $v_{n+1} = p_{n+1} - \frac{4}{23} = \frac{1}{5} - \frac{3}{20}p_n - \frac{4}{23} = \frac{23-20}{5\times 23} - \frac{3}{20}p_n = \frac{3}{115} - \frac{3}{20}p_n = -\frac{3}{20}\left(p_n - \frac{4}{23}\right) = -\frac{3}{20}p_n$.

   Cette égalité montre que la suite $(v_n)_n$ est une suite géométrique de raison $-\frac{3}{20}$.

   Son premier terme est $v_1 = p_1 - \frac{4}{23} = -\frac{4}{23}$.

   (b) Donc pour tout entier naturel n non nul, $v_n = \left(-\frac{3}{20}\right)^{n-1} \times \left(-\frac{4}{23}\right) = -\frac{4}{23}\left(-\frac{3}{20}\right)^{n-1}$.

   On en déduit que $p_n = v_n + \frac{4}{23} = -\frac{4}{23}\left(-\frac{3}{20}\right)^{n-1} + \frac{4}{23}$.

   (c) On a $-1 < -\frac{3}{20} < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{3}{20}\right)^{n-1} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{4}{23}\times\left(-\frac{3}{20}\right)^{n-1} = 0$.

   Finalement $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \frac{4}{23}$.

Solution de l'exercice 6.1 : (énoncé ►)

1. (a) On a pour $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{3}{2}x^2 - x \times x\ln x + 1$.
   On sait que $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$, donc
$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0).$$
   ainsi f est continue en 0.

   (b) On a $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(3-2\ln x) = -\infty$, donc par produit des limites :
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

2. (a) On calcule $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$.
$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\frac{1}{2}x^2(3-2\ln x)}{x} = \frac{1}{2}x(3-2\ln x) = \frac{3}{2}x - x\ln x$$
   Comme $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$.
   Conclusion f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

   (b) Pour $x > 0$, $f(x) = \dfrac{3}{2}x^2 - x \times x\ln x + 1$, donc f somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et
$$f'(x) = x(3-2\ln x) + \frac{x^2}{2}\times\left(-\frac{2}{x}\right) = 3x - 2x\ln x - x = 2x - 2x\ln x.$$

3. $f'(x) = 2x(1-\ln x)$ qui est du signe de $1-\ln x$.
   On a $f'(x) > 0 \iff 1-\ln x > 0 \iff \ln x < \ln \mathrm{e} \iff x < \mathrm{e}$;
   $f'(x) < 0 \iff 1-\ln x < 0 \iff \ln x > \ln \mathrm{e} \iff x > \mathrm{e}$
   $f'(x) = 0 \iff x = \mathrm{e}$. D'où le tableau de variations :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	1	$\nearrow$	$1+\dfrac{\mathrm{e}^2}{2}$	$\searrow$	$-\infty$

4. D'après ce tableau de variations l'équation $f(x) = 0$ n'admet qu'une solution α sur $[0\,;\,+\infty[$.
   La calculatrice donne $f(4,6) > 0$ et $f(4,7) < 0$, donc $4,6 < \alpha < 4,7$.
   $f(4,69) > 0$ et $f(4,70) < 0$, donc $4,69 < \alpha < 4,70$.

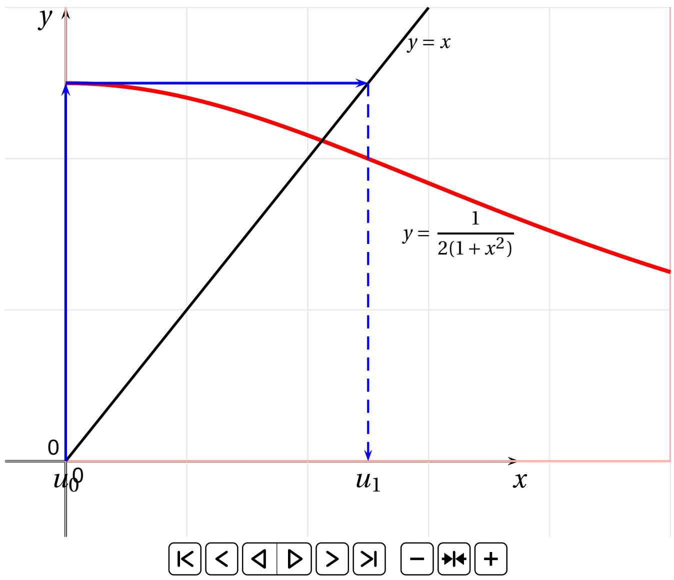
Solution de l'exercice 6.2 : (énoncé ►)

1. On pose $f(x) = \dfrac{1}{2(1+x^2)}$. f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0;1]$.
   $\forall x \in [0;1]$, $f'(x) = \dfrac{-x}{(1+x^2)^2} \leq 0$ donc f est décroissante sur $[0;1]$.
   De plus $f([0;1]) = [\frac{1}{4};\frac{1}{2}] \subset [0;1]$ donc $[0;1]$ est un intervalle stable par f.
   On montre par récurrence cette formule pour n entier naturel :
   - initialisation : la propriété est vraie au rang 0 : $u_0 \in [0;1]$

- on suppose que la propriété est vraie à un certain rang n et on doit montrer qu'elle est vraie au rang n+1 c'est à dire que $u_{n+1} \in [0;1]$
  or $u_n \in [0;1]$ et $\forall x \in [0;1], f(x) \in [0;1]$ donc $f(u_n) \in [0;1]$ or $f(u_n) = u_{n+1}$ d'où le résultat
- la propriété est héréditaire et vérifiée au rang 0 donc elle est vraie pour tout entier naturel n.

alors $\underline{\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0;1]}$

2. $\forall x \in [0,1], g'(x) = 6x^2 + 2 > 0$ donc g est continue et strictement croissante sur $[0;1]$ donc réalise une bijection de $[0;1]$ sur $[-1;1]$. $0 \in [-1;1]$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α appartenant à $[0;1]$.
3. $f(x) = x \Leftrightarrow 1 = 2x(1+x^2) \Leftrightarrow 2x^3 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0$.
4. $|f'(x)| = \dfrac{x}{(1+x^2)^2}$
   $|f'(x)| - f(x) = \dfrac{2x}{2(1+x^2)^2} - \dfrac{1+x^2}{2(1+x^2)^2} = -\dfrac{(x-1)^2}{2(1+x^2)^2} < 0$ donc pour pour réel $x \in [0;1], |f'(x)| \leq f(x)$
   $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 1 + x^2 \leq 2 \Rightarrow 2 \leq 2(1+x^2) \leq 4 \Rightarrow \dfrac{1}{4} \leq f(x) \leq \dfrac{1}{2}$
   ainsi $\forall x \in [0;1], |f'(x)| \leq f(x) \leq \dfrac{1}{2}$
   Alors d'après le corollaire de l'inégalité des accroissements finis,
   $\forall x \in [0;1], \forall y \in [0,1], |f(x) - f(y)| \leq \dfrac{1}{2}|x-y|$
   puis on pose $x = u_n \in [0,1]$ et $y = \alpha \in [0,1]$ ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, |f(u_n) - f(\alpha)| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha| \Rightarrow |u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$
5. Enfin on montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$
   et puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$ alors par théorème d'encadrement , $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - \alpha| = 0$ et par suite $\underline{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha}$



Solution de l'exercice 7.1 : (énoncé ►)

1. (a) Calcul de I_1

   On a: $\mathrm{I}_1 = \dfrac{1}{1!}\displaystyle\int_0^1 (1_x)^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (1_x)^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$;
   Faisons une intégration par parties en posant

   $$\begin{cases} u(x) = 1 - x & u'(x) = -1 \\ v'(x) = \mathrm{e}^{-x} & v(x) = -\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$$

   Toutes les fonctions étant intégrables sur $[0\,;\,1]$, il vient : $\mathrm{I}_1 = \left[-(1-x)\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 (-1)(-\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 1 - \int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 1 + \left[\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 = \mathrm{e}^{-1} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

   (b) Inégalités :

   Pour $0 \leqslant x \leqslant 1$, on a successivement : $0 \leqslant 1 - x \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant (1-x)^n \leqslant 1$ car $(n \geqslant 1)$

   et, compte tenu du fait que e^{-x} est positif, on obtient :

   $0 \leqslant (1-x)^n \mathrm{e}^{-x} \leqslant \mathrm{e}^{-x}$;

   la positivité de l'intégrale nous permet alors d'écrire :

   $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 (1-x)^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$

   et, finalement :

   $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

   Conséquence : On a $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 = 1 - \mathrm{e}^{-1} = \dfrac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}}$ et l'inégalité, précédemment obtenue, s'écrit :

   $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n!}\dfrac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}}$: or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n!} = 0$ donc, a fortiori, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

   (c) Pour $n \geqslant 1$, $I_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)!}\displaystyle\int_{0^1} (1-x)^{n+1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

   Intégrons par parties en posant :

   $$\begin{array}{ll} u(x) = (1-x)^{n+1} & u'(x) = -(n+1)(1-x)^n \\ v'(x) = \mathrm{e}^{-x} & v(x) = -\mathrm{e}^{-x} \end{array}$$

   Toutes ces fonctions étant continues sont intégrables sur $[0\,;\,1]$ et

$I_{n+1}=\dfrac{1}{(n+1)!}\left[-(n+1)\mathrm{e}^{-x}(1-x)^n\right]_0^1-\dfrac{1}{(n+1)!}\displaystyle\int_0^1 (n+1)(1-x)^n\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{(n+1)!}-\dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 (1-x)^n\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$

Finalement : $I_{n+1}=\dfrac{1}{(n+1)!}-I_n$.

2. (a) Par récurrence :

   Initialisation: $a_1=0$ et $\dfrac{1}{\mathrm{e}}+(-1)^1I_1=\dfrac{1}{\mathrm{e}}-I_1=0$: la relation est vraie pour $n=1$.

   Hérédité : supposons qu'il existe $p\in\mathbb{N}$, $p>1$ tel que

   $a_{p+1}=a_p+\dfrac{(-1)^{p+1}}{(p+1)!}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}+(-1)^pI_p+\dfrac{(-1)^{p+1}}{(p+1)!}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}+(-1)^{p+1}\left[\dfrac{1}{p+1)!}-I_p\right]=\dfrac{1}{\mathrm{e}}+(-1)^{p+1}I_{p+1}$ d'après la question 1. c.

   Conclusion : la relation (1) est vraie pour tout naturel n non nul.

   (b) Limite de la suite (a_n)

   On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|(-1)^nI_n\right|=0$.

   Finalement $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

Solution de l'exercice 7.2 : (énoncé ►)

1. $I_n=\displaystyle\int_0^1\dfrac{\mathrm{e}^{-t^2}}{1+n+t}\,\mathrm{d}t$.

   (a) Calculons $I_{n+1}-I_n=\displaystyle\int_0^1\left(\dfrac{\mathrm{e}^{-t^2}}{1+n+1+t}-\dfrac{\mathrm{e}^{-t^2}}{1+n+t}\right)\mathrm{d}t$ (par linéarité de l'intégrale ;

   $I_{n+1}-I_n=\displaystyle\int_0^1\mathrm{e}^{-t^2}\left(\dfrac{1+n+t-n-t-2}{(n+1+t)(n+2+t)}\right)\mathrm{d}t=-\displaystyle\int_0^1\dfrac{\mathrm{e}^{-t^2}}{(n+1+t)(n+2+t)}$.

   L'intégrale est positive car la fonction est positive (tous ses termes sont supérieurs à zéro).

   Conclusion : $I_{n+1}-I_n<0$, donc la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

   (b) Intégrale d'une fonction positive et comme $0<1$, $I_n>0$.

   (c) $0\leqslant t\leqslant 1\Rightarrow 0\leqslant t^2\leqslant 1\Rightarrow -1\leqslant -t^2\leqslant 0\Rightarrow \mathrm{e}^{-1}\leqslant \mathrm{e}^{-t^2}\leqslant \mathrm{e}^0=1$.

   Donc $\mathrm{e}^{-t^2}\leqslant 1\quad(1)$.

   D'autre part $0\leqslant t\leqslant 1\Rightarrow n+1\leqslant n+1+t\leqslant n+2\Rightarrow\dfrac{1}{n+2}\leqslant\dfrac{1}{n++1+t}\leqslant\dfrac{1}{n+1}$.

   Donc $\dfrac{1}{n++1+t}\leqslant\dfrac{1}{n+1}\quad(2)$.

   Tous les termes des inégalités (1) et (2) étant positifs, on obtient par produit :

   $\dfrac{\mathrm{e}^{-t^2}}{n+1+t}\leqslant\dfrac{1}{n+1}$.

   Par intégration sur l'intervalle $[0\,;\,1]$, on obtient $I_n\leqslant\displaystyle\int_0^1\dfrac{1}{n+1}\,\mathrm{d}t$, soit comme l'intégrale est positive :

$$0\leqslant I_n\leqslant\frac{1}{n+1}$$

   Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n+1}=0$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=0$. (suite décroissante minorée : elle converge)

2. (a) Sur $[0:1]$, $f(x)=\mathrm{e}^{-x}+x-1$. Somme de fonctions dérivables, f est dérivable et :

   $f'(x)=-\mathrm{e}^{-x}+1$. Or $f'(x)=0\iff\mathrm{e}^{-x}=1\iff x=0$.

   Comme $0\leqslant x\leqslant 1\Rightarrow -1\leqslant -x\leqslant 0\Rightarrow\mathrm{e}^{-1}\leqslant\mathrm{e}^{-x}\leqslant\mathrm{e}^0\Rightarrow 1-\mathrm{e}^{-x}\geqslant 0$, $f'(x)\geqslant 0$ sur $[0\,;1]$, donc la fonction est croissante de $f(0)=0$ à $f(1)=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$, On en déduit que sur $[0\,;1]$, $f(x)\geqslant 0$.

   (b) g somme de fonctions dérivables est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur $[0:1]$ et $g'(x)=-1+x+\mathrm{e}^{-x}=f(x)$.

   D'après la question précédente $g'(x)\geqslant 0$, donc la fonction g est croissante sur $[0\,;1]$. Comme $g(0)=0$, la fonction est elle aussi positive sur $[0\,;1]$.

(c) On a vu que f est positive sur $[0\ ;\ 1]$:

$e^{-x}+x-1\geqslant 0 \iff 1-x\leqslant e^{-x}$.

De même g est positive sur $[0\ ;\ 1]$:

$1-x+\dfrac{x^2}{2}-e^{-x}\geqslant 0 \iff e^{-x}\leqslant 1-x+\dfrac{x^2}{2}$.

On a donc finalement l'encadrement

$$1-x\leqslant e^{-x}\leqslant 1-x+\frac{x^2}{2}$$

(d) $0\leqslant t\leqslant 1 \Rightarrow 0\leqslant t^2\leqslant 1$.

En utilisant l'encadrement trouvé juste au dessus avec $x=t^2$, on obtient

$$1-t^2\leqslant e^{-t^2}\leqslant 1-t^2+\frac{t^4}{2}$$

(e) En intégrant sur $[0;1]$ chacune des fonctions de l'encadrement juste trouvé (après produit par la fonction positive $t\longmapsto \dfrac{1}{1+n+t}$), on obtient

$$\int_0^x \frac{1-t^2}{1+t+n}\leqslant I_n\leqslant \int_0^x \frac{1-t^2+\frac{t^4}{2}}{1+t+n}$$

- $0\leqslant t\leqslant 1\Rightarrow t+n+1\leqslant n+2 \iff \dfrac{1}{n+2}\leqslant\dfrac{1}{1+t+n}$. D'où en intégrant :

$\displaystyle\int_0^1 \frac{1-t^2}{n+2}\leqslant\int_0^x \frac{1-t^2}{1+t+n}$.

Comme $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-t^2}{n+2}=\frac{1}{n+2}\left[t-\frac{t^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{n+2}\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3(n+2)}$.

- $0\leqslant t\leqslant 1\Rightarrow n+1\leqslant t+n+1 \iff \dfrac{1}{1+t+n}\leqslant\dfrac{1}{n+1}$. D'où en intégrant :

$\displaystyle\int_0^1 \frac{1-t^2+\frac{t^4}{2}}{1+t+n}\leqslant\int_0^1 \frac{1-t^2+\frac{t^4}{2}}{n+1}$.

Comme $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-t^2+\frac{t^4}{2}}{n+1}=\frac{1}{n+1}\left[t-\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{10}\right]_0^1=\frac{1}{n+1}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{10}\right)=$
$\displaystyle\frac{1}{n+1}\left(\frac{30-10+3}{30}\right)=\frac{23}{30(n+1)}$.

Conclusion :

$$\frac{2}{3(n+2)}\leqslant I_n\leqslant\frac{23}{30(n+1)}$$

Solution de l'exercice 8.1 : (énoncé ►)

$$\begin{aligned}A_n &= \sum_{k=0}^{n}k^2+\sum_{k=0}^{n}3^k\\ &=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{1-3^{n+1}}{1-3}\\ &=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{1-3^{n+1}}{2}\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 8.2 : (énoncé ►)

Pour tout entier naturel $k\geq 1$:

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{a}{k}+\frac{b}{k+1}\Leftrightarrow\frac{1}{k(k+1)}=\frac{a(k+1)+bk}{k(k+1)}$$
$$\Leftrightarrow 1=(a+b)k+a$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=0\\a=1\end{cases}\quad\text{par identification des constantes}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=-1\end{cases}$$

ainsi $\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{1}{k}+\dfrac{-1}{k+1}$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}+\frac{-1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$ (somme télescopique)

Solution de l'exercice 8.3 : (énoncé ►)

$\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\ln\left(\frac{k-1}{k}\right)=\sum_{k=2}^{n}\ln(k-1)-\ln k=\sum_{k=2}^{n}\ln(k-1)-\sum_{k=2}^{n}\ln k$

$\displaystyle=\sum_{k'=1}^{n-1}\ln k'-\sum_{k=2}^{n}\ln k=\ln 1-\ln n$

Solution de l'exercice 8.4 : (énoncé ►)

1. Comme $x\neq 1$, on a $S_n(x)=\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$
2. S_n est dérivable sur $[0,1[$ et

$$\begin{aligned}S'_n(x)&=0+\sum_{k=1}^{n}kx^{k-1}\\&=\frac{-(n+1)x^n(1-x)+\left(1-x^{n+1}\right)}{(1-x)^2}\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}kx^{k-1}=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}}$

$$\sum_{k=1}^{n}kx^{k-1}=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}$$

Solution de l'exercice 9.1 : (énoncé ►)

On reconnait ici le type de question où on demande à la fois la convergence et le calcul donc on peut tenter de faire la calcul de la somme partielle puis le passage à la limite.

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=0}^{n}k\left(\frac{1}{2}\right)^k\\&=\sum_{k=1}^{n}k\left(\frac{1}{2}\right)^k\quad\text{car le terme pour k=0 est nul}\\&=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\quad\text{pour faire apparaitre un terme général bien connu}\end{aligned}$$

$k\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1}$ est le terme général d'une série géométrique convergente car $0<\dfrac{1}{2}<1$

et on a donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}=\sum_{k=1}^{+\infty}k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}=4$

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 2$ donc la série converge et sa somme vaut 2.

Solution de l'exercice 9.2 : (énoncé ►)

On reconnait ici le type de question où on demande à la fois la convergence et le calcul donc on peut tenter de faire la calcul de la somme partielle puis le passage à la limite.

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{n} k^2\left(\frac{1}{3}\right)^k \\
&= \sum_{k=1}^{n} k^2\left(\frac{1}{3}\right)^k \text{ car le terme pour k=0 est nul} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k(k-1+1)\left(\frac{1}{3}\right)^k \text{ transformation classique} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k(k-1)\left(\frac{1}{3}\right)^k + \sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{3}\right)^k \text{ on développpe astucieusement} \\
&= \sum_{k=\mathbf{2}}^{n} k(k-1)\left(\frac{1}{3}\right)^k + \sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{3}\right)^k \text{ car pour k=1 le terme de la 1ere somme est nul} \\
&= \left(\frac{1}{3}\right)^2 \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2} + \left(\frac{1}{3}\right)\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \text{ apparition des séries géom dérivées}
\end{aligned}$$

$k(k-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2}$ est le terme général d'une série géométrique convergente car $0<\frac{1}{3}<1$

et on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2} = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2} = \frac{2}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^3} = \frac{27}{4}$

par ailleurs $k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$ st le terme général d'une série géométrique convergente car $0<\frac{1}{3}<1$

et on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{9}{4}$

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \left(\frac{1}{3}\right)^2\frac{27}{4} + \frac{1}{3}\frac{9}{4} = \frac{3}{2}$ donc la série converge et sa somme vaut $\frac{3}{2}$.

Solution de l'exercice 9.3 : (énoncé ►)

1. $\forall n \geq 1, \frac{5}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} \Leftrightarrow 5 = a(n+1)+bn \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ a=5 \end{cases}$ par identification des constantes

   Ainsi $a=5$ et $b=-5$ donc $u_n = 5\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

2. $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = 5\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = 5\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$ en tant que somme télescopique.

   or $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1} = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 5$ donc la série converge et sa somme vaut 5.

Solution de l'exercice 9.4 : (énoncé ►)

1. On pose pour tout $x\in[0;1]$, $f(x) = x - x^2$. On a $f'(x) = 1-2x$ donc on en déduit le tableau de variations de f :

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	0 $\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$

2. Montrons par récurrence que la propriété $P(n) : 0 < u_n < 1$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   - Pour $n = 0$: On sait que $u_0 \in]0;1[$ donc on a bien $0 < u_0 < 1$, c'est-à-dire que $P(0)$ est vraie.

   - Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons $P(n)$ vraie.

   On remarque donc que si $x \in]0;1[$ alors $0 < f(x) \leqslant \dfrac{1}{4}$.

   On d'après $P(n)$, on sait que $u_n \in]0;1[$ donc on a $0 < f(u_n) \leqslant \dfrac{1}{4}$. Par conséquent $0 < u_{n+1} < 1$.
   $P(n+1)$ est donc vraie.

   - Grâce au principe de récurrence on a montré que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n < 1.}$

3. On a $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 < 0$ donc la suite (u_n) est décroissante.

   Ainsi (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle converge vers un nombre ℓ.

   Comme on a $u_{n+1} = f(u_n)$ et que f est continue sur $[0;1]$ on sait que ℓ doit être un point fixe de f. Or :

$$f(x) = x \Leftrightarrow x - x^2 = x \Leftrightarrow -x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

   Donc $\boxed{(u_n) \text{ converge vers } 0.}$

4. On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k^2 = \sum_{k=0}^{n} (u_k - u_{k+1}) = u_0 - u_{n+1}$.

   Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_0 - u_{n+1} = u_0$ donc la série $\sum u_n^2$ est convergente et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 = u_0$.

   IL FAUT MAITRISER CETTE METHODE .

Solution de l'exercice 10.1 : (énoncé ►)

1. $A = \left\{ a\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}, \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}\right)$

   donc A est un espace vectoriel engendré par la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}\right)$. Cette famille est libre puisque le deuxième vecteur n'est pas colinéaire au premier donc elle forme une base de A.

2. $\begin{cases} a+b+c=0 \\ 2b-c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-3b \\ c=2b \end{cases}$

   Ainsi $B = \left\{ \begin{pmatrix}-3b\\b\\2b\end{pmatrix}, \quad b \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ b\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}, b \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}\right)$

   donc A est un espace vectoriel engendré par la famille $\left(\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}\right)$. Cette famille est libre puisque constituée d'un vecteur non nul donc elle forme une base de A.

   $C = \left\{ X \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R}) | \begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 3\end{pmatrix} X = 3X \right\}$.

Deux méthodes ici ; la première est celle utilisant la définition d'un sous-espace vectoriel en montrant que C est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et la deuxième en résolvant l'équation pour transformer C en Vect.

1ère méthode :

$C \neq \emptyset$ car $O_2 \in C$

$C \subset \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$

Soit $X \in C, Y \in C$. Soient $\lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}$,

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} (\lambda X + \mu Y) = \lambda \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} X + \mu \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} Y = \lambda 3X + \mu 3Y$ car $X \in C$ et $Y \in C$

$= 3(\lambda X + \mu Y)$ donc $\lambda X + \mu Y \in C$

alors C est un espace vectoriel.

2ème méthode :

On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} X = 3X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 3x \\ 3y = 3y \end{cases} \quad \Leftrightarrow x = y$

Ainsi $C = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ donc C est un espace vectoriel engendré par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ étant une famille consituée d'un vecteur non nul elle est libre et forme une base de C.

Il est à noter que cette deuxième méthode a permis en plus de donner une base (qui était demandée).

Solution de l'exercice 10.2 : (énoncé ►)

On travaille dans $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ donc une base est constituée de 3 vecteurs, ce qui exclut la première.

La deuxième et la troisième sont constituées trois vecteurs ; ils suffit de montrer que ces vecteurs forment une famille libre.

Soit $\lambda_1 \in \mathbb{R}, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_3 \in \mathbb{R}$.

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \quad L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Ainsi la famille $\mathscr{B}_2$ est libre, constituée de trois vecteurs d'un espace de dimension 3 donc forme une base de cet espace.

Soit $\lambda_1 \in \mathbb{R}, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_3 \in \mathbb{R}$.

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -\lambda_3 \\ \lambda_2 = -\lambda_3 \\ -2\lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Ainsi la famille est $\mathscr{B}_3$ libre, constituée de trois vecteurs d'un espace de dimension 3 donc forme une base de cet espace.

Il est à remarquer que ces deux systèmes ont été résolus sans pivot de Gauss car des évidences simplifiant rapidement la résolution sont apparues.

Solution de l'exercice 10.3 : (énoncé ►)

1. Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \in E$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}$.

$$f\left(\lambda\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}\right)=f\left(\begin{pmatrix}\lambda x+\mu x'\\\lambda y+\mu y'\\\lambda z+\mu z'\end{pmatrix}\right)$$
$$=\begin{pmatrix}\lambda x+\mu x'-(\lambda y+\mu y')+\lambda z+\mu z'\\\lambda x+\mu x'+\lambda y+\mu y'+\lambda z+\mu z'\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\lambda(x-y+z)+\mu(x'-y'+z')\\\lambda(x+y+z)+\mu(x'+y'+z')\end{pmatrix}$$
$$=\lambda\begin{pmatrix}x-y+z\\x'+y'+z'\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}x'-y'+z'\\x'+y'+z'\end{pmatrix}$$
$$=\lambda f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\mu f\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$$

Donc f est linéaire.

2. On pose $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ alors $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ est telle que $\forall X\in E,\quad f(X)=AX$.

   (on peut aussi raisonner en mettant en colonnes les images des vecteurs de la base canonique de $E=\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ qui sont $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$)

3. Pour le noyau on résout $f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x-y+z=0\\x+y+z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-y+z=0\\2y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-z\\y=0\end{cases}$

   Ainsi $\operatorname{Ker}(f)=\left\{\begin{pmatrix}-z\\0\\z\end{pmatrix},z\in\mathbb{R}\right\}=\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.

   La famille $\left(\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est consituée d'un vecteur non nul générateur de $\operatorname{Ker}(f)$ donc forme une base de $\operatorname{Ker}(f)$.

   Pour déterminer l'image on a deux méthodes :

   1ère méthode :

   $\operatorname{Im}(f)=\left\{\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\in M_{2,1}(\mathbb{R})|\exists\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in M_{3,1}(\mathbb{R})|\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right\}$

   or $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x-y+z=a\\x+y+z=b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-y+z=a\\2y=b-a\quad L_2\leftarrow L_2-L_1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+z=\dfrac{a+b}{2}\\y=\dfrac{b-a}{2}\end{cases}$

   ainsi pour tout $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\in M_{2,1}(\mathbb{R})$ ce système a une solution donc $\operatorname{Im}(f)=M_{2,1}(\mathbb{R})$

   2ème méthode : on cherche les images des vecteurs de la base canonique : il suffit de les lire en colonne dans la matrice et on trouve $\operatorname{Im}(f)=\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right)$ (on ne met pas le troisième puisqu'il est égal au premier). Ces deux vecteurs forment une famille libre donc une base de $\operatorname{Im}(f)$.

   Cette deuxième méthode est simple et efficace mais il faut maitriser également la première.

Solution de l'exercice 10.4 : (énoncé ►)

1. — Le vecteur colonne associé à $\vec{u}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $\begin{pmatrix}2\\4\\-5\end{pmatrix}$

De plus on a $A \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$

Donc $f(\vec{u}) = (-2,-4,5) = -\vec{u}$.

— De même $f(\vec{v}) = \vec{v}$

— $f(\vec{w}) = \vec{w}$

2. Montrons que la famille $\mathscr{B}'$ est libre. On cherche tous les réels a, b et c tels que :

$$a(2,4,-5)+b(1,0,1)+c(0,1,-2) = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b=0 \\ 4a+c=0 \\ -5a+b-2c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2a \\ c=-4a \\ a=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=0$$

Donc la famille $\mathscr{B}'$ est libre.

La famille $\mathscr{B}'$ est donc une famille libre de trois vecteurs de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3.

$\boxed{\text{Donc } \mathscr{B}' \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.}$

3. D'après la question 1 on a :

$$f(\vec{u}) = -\vec{u}+0\vec{v}+0\vec{w} \qquad f(\vec{v}) = 0\vec{u}+\vec{v}+0\vec{w} \qquad f(\vec{w}) = 0\vec{u}+0\vec{v}+\vec{w}$$

Donc $\boxed{A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

4. On a $\boxed{A'^2 = I.}$

Or A'^2 est la matrice associée à l'endomorphisme f^2 relativement à la base $\mathscr{B}'$. Comme nous trouvons la matrice identité cela signifie que f^2 est l'application identité.

$\boxed{f^2 = id.}$

Solution de l'exercice 10.5 : (énoncé ►)

1. On a : $M_a \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a+2 & -(2a+1) & a \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_2 \\ L_2 \leftarrow L_3 \\ L_3 \leftarrow L_1 \end{array}$

Donc M_a est équivalente a une matrice triangulaire où sur la diagonale il y a : 1, 1 et a.

Ainsi $\boxed{M_a \text{ est inversible dès que } a \neq 0.}$

2. Comme M_a est la matrice de f_a, pour que f_a soit un automorphisme il faut et il suffit que M_a soit inversible.

Donc $\boxed{f_a \text{ est un automorphisme si et seulement si } a \neq 0.}$

3. Montrons que $\mathscr{B}'$ est une famille libre. On cherche tous les réels x, y et z tels que :

$$\begin{aligned}
& xe'_1 + ye'_2 + ze'_3 = 0 \\
\Leftrightarrow & x(a^2e_1 + ae_2 + e_3) + y(e_1 + e_2 + e_3) + z(2e_1 + e_2) = 0 \\
\Leftrightarrow & (xa^2 + y + 2z)e_1 + (xa + y + z)e_2 + (x + y)e_3 = 0 \\
\Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} xa^2 + y + 2z = 0 \\ xa + y + z = 0 \qquad \text{car la famille } \mathscr{B} \text{ est libre} \\ x + y = 0 \end{array} \right. \\
\Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} (-a^2 + 1 + 2(a-1))y = 0 \\ z = (a-1)y \\ x = -y \end{array} \right. \\
\Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} -(a-1)^2 y = 0 \\ z = (a-1)y \\ x = -y \end{array} \right. \\
\Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \text{ car } a \neq 1 \\ z = 0 \\ x = 0 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Donc la famille $\mathscr{B}'$ est une famille libre.

Ainsi $\mathscr{B}'$ est une famille libre de 3 vecteurs de E qui est un espace vectoriel de dimension 3. Donc $\mathscr{B}'$ est une base de E.

4. Grâce à la matrice M_a on sait que :

$$\begin{aligned}
f_a(e_1) &= (a+2)e_1 + e_2 + 0e_3 \\
f_a(e_2) &= -(2a+1)e_1 + 0e_2 + e_3 \\
f_a(e_3) &= ae_1 + 0e_2 + 0e_3
\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
f_a(e'_1) &= f_a(a^2e_1 + ae_2 + e_3) \\
&= a^2 f_a(e_1) + a f_a(e_2) + f_a(e_3) \\
&= a^2((a+2)e_1 + e_2) + a(-(2a+1)e_1 + e_3) + ae_1 \\
&= (a^3 + 2a^2 - 2a^2 - a + a)e_1 + a^2e_2 + ae_3 \\
&= a^3e_1 + a^2e_2 + ae_3 \\
&= ae'_1
\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}
f_a(e'_2) &= f_a(e_1 + e_2 + e_3) \\
&= f_a(e_1) + f_a(e_2) + f_a(e_3) \\
&= ((a+2)e_1 + e_2) + (-(2a+1)e_1 + e_3) + ae_1 \\
&= (a + 2 - 2a - 1 + a)e_1 + e_2 + e_3 \\
&= e_1 + e_2 + e_3 \\
&= e'_2
\end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned}
f_a(e_3') &= f_a(2e_1+e_2)\\
&= 2f_a(e_1)+f_a(e_2)\\
&= 2((a+2)e_1+e_2)+(-(2a+1)e_1+e_3)\\
&= (2a+4-2a-1)e_1+2e_2+e_3\\
&= 3e_1+2e_2+e_3\\
&= e_2'+e_3'
\end{aligned}$$

5. Dans la question précédente on a vu que :

$$\begin{aligned}
f_a(e_1') &= ae_1'\\
f_a(e_2') &= e_2'\\
f_a(e_3') &= e_2'+e_3'
\end{aligned}$$

Donc on en déduit que $\boxed{T_a = \begin{pmatrix} a & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}$

Solution de l'exercice 11.1 : (énoncé ►)

1. On travaille avec la somme partielle :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{N} \mathrm{P}(X=k) &= \sum_{k=2}^{N}\left[q\,p^{k-1}+p\,q^{k-1}\right]\\
&= q\sum_{h=1}^{N-1} p^h + p\sum_{h=1}^{N-1} q^h\\
&= q\sum_{h=0}^{N-1} p^h - q + p\sum_{h=0}^{N-1} q^h - p\\
&\to q\frac{1}{1-p} - q + p\frac{1}{1-q} - p
\end{aligned}$$

car $|p|<1$ et $|q|<1$ et comme $p+q=1$

Conclusion : $\boxed{\sum_{k=2}^{+\infty} \mathrm{P}(X=k)=1}$

2. Pour $k\geq 2$, on a $|k\mathrm{P}(X=k)| = k\mathrm{P}(X=k)$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{N} k\mathrm{P}(X=k) &= q\sum_{k=2}^{N} k\,p^{k-1} + p\sum_{k=2}^{N} k\,q^{k-1}\\
&= q\sum_{k=1}^{N} k\,p^{k-1} - q + p\sum_{k=1}^{N} k\,q^{k-1} - p\\
&\to q\frac{1}{(1-p)^2} - q + p\frac{1}{(1-q)^2} - p
\end{aligned}$$

donc la série converge absolument, X a une espérance et $E(X) = \dfrac{1}{q} - q + \dfrac{1}{p} - p$ avec

Conclusion : $\boxed{X \text{ admet une espérance et que : } E(X) = \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}-1.}$

Solution de l'exercice 11.2 : (énoncé ►)

1. Y_1 est le nombre de boules rouges présentes dans l'urne à l'issue du premier tirage.
   - Si on a tiré rouge, elle est remplacée par bleue et il n'en reste qu'une
   - Si on tiré bleu, elle est remise dans l'urne et il reste 2 rouges.

   Donc $Y(\Omega) = \{1, 2\}$ avec
   - $(Y = 1) = R_1$ et $\mathrm{P}(Y = 1) = \dfrac{2}{3}$ (boules équiprobables)
   - et $(Y = 2) = B_1$ et $\mathrm{P}(Y = 2) = \dfrac{1}{3}$
2. Quand $n \geq 2$, on peut avoir obtenu aucune, une ou 2 boules rouges.

   Donc à l'issue des n tirages, il peut en rester $Y_n(\Omega) = \{0, 1, 2\}$
3. $(Y_n = 2)$ signifie que l'on a retiré aucune boule rouge. Donc que l'on a obtenu que des boules bleues.

   $(Y_n = 2) = B_1 \cap \cdots \cap B_n$

   Donc $\mathrm{P}(Y_n = 2) = \mathrm{P}(B_1) \cdot \mathrm{P}_{B_1}(B_2) \cdots \mathrm{P}_{B_1 \cap \cdots \cap B_{n-1}}(B_n)$ le conditionnement précisant que l'on conserve toujours les mêmes boules dans l'urne.

   Donc $\mathrm{P}(Y_n = 2) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$
4. On pose pour tout entier naturel non nul$n$, $u_n = P(Y_n = 1)$.

   (a) On a trouvé $u_1 = \mathrm{P}(Y_1 = 1) = \dfrac{2}{3}$

   On a $u_2 = \mathrm{P}(Y_2 = 1)$

   Comme $(Y_2 = 1)$ signifie qu'il ne reste qu'un rouge, c'est que l'on en a tiré une seule : au premier ou au second tirage.

   $(Y_2 = 1) = (R_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap R_2)$ et les deux étant incompatibles

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(Y_2 = 1) &= \mathrm{P}(R_1 \cap B_2) + \mathrm{P}(B_1 \cap R_2) \\
&= \mathrm{P}(R_1) \cdot \mathrm{P}_{R_1}(B_2) + \mathrm{P}(B_1) \cdot \mathrm{P}_{B_1}(R_2) \\
&= \frac{2}{3}\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\frac{2}{3} = \frac{6}{9}
\end{aligned}$$

   On a donc bien $u_2 = \dfrac{2}{3}$.

   (b) Pour $n \geq 2$, $(Y_n = 0, Y_n = 1, Y_n = 2)$ est une système complet d'événements

   Donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(Y_{n+1} = 1) = &\ \mathrm{P}_{Y_{n=0}}(Y_{n+1} = 1)\,\mathrm{P}(Y_n = 0) \\
&+ \mathrm{P}_{Y_{n=1}}(Y_{n+1} = 1)\,\mathrm{P}(Y_n = 1) \\
&+ \mathrm{P}_{Y_{n=2}}(Y_{n+1} = 1)\,\mathrm{P}(Y_n = 2)
\end{aligned}$$

   le conditionnement donne la composition de l'urne et donc pour avoir après tirage une seule rouge il faut :
   - $\mathrm{P}_{Y_{n=0}}(Y_{n+1} = 1) = 0$
   - $\mathrm{P}_{Y_{n=1}}(Y_{n+1} = 1) = \mathrm{P}_{2B1R}(B_n) = \dfrac{2}{3}$
   - $\mathrm{P}_{Y_{n=2}}(Y_{n+1} = 1) = \mathrm{P}_{2R1B}(R_n) = \dfrac{2}{3}$ et

$$\begin{aligned}
P(Y_{n+1}=1) &= \frac{2}{3}P(Y_n=1)+\frac{2}{3}P(Y_n=2)\\
&= \frac{2}{3}u_n+\frac{2}{3^{n+1}}
\end{aligned}$$

Et pour $n=1$ on a $\frac{2}{3}u_1+\frac{2}{3^2}=\frac{2}{3}\frac{2}{3}+\frac{2}{9}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}=u_2$

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n\geq 1\text{, on a } u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+\frac{2}{3^{n+1}}}$

(c) On pose pour tout entier naturel n non nul $v_n=u_n+\frac{2}{3^n}$.
On calcule v_{n+1} en fonction de v_n :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= u_{n+1}+\frac{2}{3^{n+1}}\\
&= \frac{2}{3}u_n+\frac{2}{3^{n+1}}+\frac{2}{3^{n+1}}\\
&= \frac{2}{3}\left(u_n+\frac{2}{3^{n+1}}\right)\\
&= \frac{2}{3}v_n
\end{aligned}$$

Donc la suite v est géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et $v_n=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}v_1$ pour tout entier $n\geq 1$ avec $v_1=u_1+\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$ on a donc

Conclusion : $\boxed{u_n=v_n-\frac{2}{3^n}=2\left(\frac{2}{3}\right)^n-\frac{2}{3^n}}$

(d) Pour $n\geq 2$, comme les seules valeurs possibles de Y_n sont 0, 1 et 2 on a donc

$$\begin{aligned}
P(Y_n=0) &= 1-P(Y_n=1)-P(Y_n=2)\\
&= 1-\left(2\left(\frac{2}{3}\right)^n-\frac{2}{3^n}\right)-\left(\frac{1}{3}\right)^n\\
&= 1-2\left(\frac{2}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n
\end{aligned}$$

formule que l'on test pour $n=1$: $1-2\left(\frac{2}{3}\right)^1+\left(\frac{1}{3}\right)^1=0=P(Y_1=0)$ convient encore.

Conclusion : $\boxed{\text{Donc pour tout entier } n\geq 1 \text{ on a } P(Y_n=0)=1-2\left(\frac{2}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n}$

5. On a alors $E(Y_n)=0P(Y_n=0)+1P(Y_n=1)+2P(Y_n=2)=2\left(\frac{2}{3}\right)^n-\frac{2}{3^n}+2\left(\frac{1}{3}\right)^n=2\left(\frac{2}{3}\right)^n$

Conclusion : $\boxed{E(Y_n)=2\left(\frac{2}{3}\right)^n}$

Solution de l'exercice 11.3 : (énoncé ►)

1. Les variables X, Y, Z suivent respectivement la loi géométrique de paramètre $\frac{8}{14} = \frac{4}{7}$, $\frac{2}{14} = \frac{1}{7}$ et $\frac{4}{14} = \frac{2}{7}$ donc

$$\begin{aligned}
X(\Omega) &= \mathbb{N}^\times \quad Y(\Omega) = \mathbb{N}^\times \quad Z(\Omega) = \mathbb{N}^\times \\
\forall n &\in \mathbb{N}^\times, \quad \begin{cases} p(X = n) = P(\underbrace{\overline{R} \cdots \overline{R}}_{n-1 \text{ fois}} R) = \left(1 - \frac{4}{7}\right)^{n-1} \frac{4}{7} = \frac{4}{7}\left(\frac{3}{7}\right)^{n-1} \\ p(Y = n) = P(\underbrace{\overline{V} \cdots \overline{V}}_{n-1 \text{ fois}} V) = \left(1 - \frac{1}{7}\right)^{n-1} \frac{1}{7} = \frac{1}{7}\left(\frac{6}{7}\right)^{n-1} \\ p(X = n) = P(\underbrace{\overline{N} \cdots \overline{N}}_{n-1 \text{ fois}} N) = \left(1 - \frac{2}{7}\right)^{n-1} \frac{2}{7} = \frac{2}{7}\left(\frac{5}{7}\right)^{n-1} \end{cases} \\
E(X) &= \frac{1}{\frac{4}{7}} = \frac{7}{4} \quad E(Y) = \frac{1}{\frac{1}{7}} = 7 \quad E(Z) = \frac{1}{\frac{2}{7}} = \frac{7}{2} \\
V(X) &= \frac{1 - \frac{4}{7}}{\left(\frac{4}{7}\right)^2} = \frac{21}{16} \quad V(Y) = \frac{1 - \frac{1}{7}}{\left(\frac{1}{7}\right)^2} = 42 \quad V(Z) = \frac{1 - \frac{2}{7}}{\left(\frac{2}{7}\right)^2} = \frac{35}{4}
\end{aligned}$$

2. On note G : « le joueur gagne en au plus 4 lancers ». Pour que l'évènement G se réalise
   - soit il gagne au premier lancer, ce qui est équivalent à la réalisation de l'évènement R_1,
   - soit il ne perd pas au premier lancer et il gagne au second lancer, ce qui est équivalent à la réalisation de l'évènement N_1R_2,
   - soit il ne perd pas au premier lancer et au second lancer et il gagne au troisième lancer, ce qui est équivalent à la réalisation de l'évènement $N_1N_2R_3$,
   - soit il ne perd pas au premier lancer, au second et au troisième lancer tout en gagnant au quatrième lancer, ce qui est équivalent à la réalisation de l'évènement $N_1N_2N_3R_4$,

   Par conséquent, on a

$$p(G) = p(R_1 \cup N_1R_2 \cup N_1N_2R_3 \cup N_1N_2N_3R_4).$$

   L'union étant disjointe et les lancers indépendants, on en déduit que

$$p(G) = p(R_1) + p(N_1R_2) + p(N_1N_2R_3) + p(N_1N_2N_3R_4) = \frac{4}{7} + \frac{2}{7} \times \frac{4}{7} + \left(\frac{2}{7}\right)^2 \times \frac{4}{7} + \left(\frac{2}{7}\right)^3 \times \frac{4}{7} = \frac{1908}{2401}$$

3. On note H : « le joueur perd en au plus 4 lancers ». Pour que l'évènement H se réalise
   - soit il perd au premier lancer, ce qui est équivalent à la réalisation de l'évènement V_1,
   - soit il ne perd pas et il ne gagne pas au premier lancer tout en perdant au second lancer, ce qui est équivalent à la réalisation de l'évènement N_1V_2,
   - soit il ne perd pas et il ne gagne pas au premier et second lancer tout en perdant au troisième lancer, ce qui est équivalent à la réalisation de l'évènement $N_1N_2V_3$,
   - soit il ne perd pas et il ne gagne pas au premier, au second et au troisième lancer tout en perdant au quatrième lancer, ce qui est équivalent à la réalisation de l'évènement $N_1N_2N_3V_4$,

   Par conséquent, on a

$$p(H) = p(V_1 \cup N_1V_2 \cup N_1N_2V_3 \cup N_1N_2N_3V_4).$$

   L'union étant disjointe et les lancers indépendants, on en déduit que

$$p(H) = p(V_1) + p(N_1V_2) + p(N_1N_2V_3) + p(N_1N_2N_3V_4) = \frac{1}{7} + \frac{2}{7} \times \frac{1}{7} + \left(\frac{2}{7}\right)^2 \times \frac{1}{7} + \left(\frac{2}{7}\right)^3 \times \frac{1}{7} = \frac{477}{2401}$$

4. On note I : « joueur n'a ni gagné, ni perdu à l'issue des 4 premiers lancers ». Il est immédiat que $I = \overline{G \cup H}$, l'union étant disjointe (on ne peut pas gagner et perdre à la fois en 4 tirages), on a

$$p(I) = 1 - p(G \cup H) = 1 - (p(G) + p(H)) = \frac{16}{2401}$$

5. (a) Il est immédiat que $R(\Omega) = \mathbb{N}$ et, puisque gagner au n-ième lancer signifie que l'on a ni perdu, ni gagné lors des $n-1$ premiers lancers et que l'on gagne au n-ième lancer, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^{\times}, \quad p(R = n) = P(\underbrace{N \cdots N}_{n-1 \text{ fois}} R) = \left(\frac{2}{7}\right)^{n-1} \frac{4}{7}.$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} p(R = n) = \frac{4}{7} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{7}\right)^{n-1} \underset{j=n-1}{=} \frac{4}{7} \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{7}\right)^{j} = \frac{4}{7} \times \frac{1}{1 - \frac{2}{7}} = \frac{4}{5}$$

donc $P(R = 0) = \dfrac{1}{5}$

(c) La variable R possède une espérance puisque la série

$$\sum_{n \geqslant 1} n \times p(R = n) = \sum_{n \geqslant 1} n \left(\frac{2}{7}\right)^{n-1} \frac{4}{7} = \frac{4}{7} \sum_{n \geqslant 0} n \left(\frac{2}{7}\right)^{n-1}$$

converge, étant donné que $\dfrac{2}{7} \in \left]-1, 1\right[$ et l'on a

$$E(R) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \times p(R = n) = \frac{4}{7} \sum_{n=0}^{+\infty} n \left(\frac{2}{7}\right)^{n-1} = \frac{4}{7} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{2}{7}\right)^2} = \frac{28}{25}$$

6. (a) Il est immédiat que $S(\Omega) = \mathbb{N}$ et, puisque perdre au n-ième lancer signifie que l'on a ni perdu, ni gagné lors des $n-1$ premiers lancers et que l'on perd au n-ième lancer, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^{\times}, \quad p(S = n) = P(\underbrace{N \cdots N}_{n-1 \text{ fois}} V) = \left(\frac{2}{7}\right)^{n-1} \frac{1}{7}.$$

(b) La variable S possède une espérance puisque la série

$$\sum_{n \geqslant 1} n \times p(S = n) = \sum_{n \geqslant 1} n \left(\frac{2}{7}\right)^{n-1} \frac{1}{7} = \frac{1}{7} \sum_{n \geqslant 0} n \left(\frac{2}{7}\right)^{n-1}$$

converge, étant donné que $\dfrac{2}{7} \in \left]-1, 1\right[$ et l'on a

$$E(S) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \times p(S = n) = \frac{1}{7} \sum_{n=0}^{+\infty} n \left(\frac{2}{7}\right)^{n-1} = \frac{1}{7} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{2}{7}\right)^2} = \frac{7}{25}$$

7. Le joueur gagne (en un nombre quelconque de lancers) si, et seulement si, il gagne au premier lancer, au second lancer, etc. donc

$$p(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} p(X = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{7}\right)^{n-1} \frac{4}{7} \underset{j=n-1}{=} \frac{4}{7} \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{7}\right)^{j} = \frac{4}{7} \times \frac{1}{1 - \frac{2}{7}} = \frac{4}{5}$$

8. Le joueur perd (en un nombre quelconque de lancers) si, et seulement si, il perd au premier lancer, au second lancer, etc. donc

$$p(B) = \sum_{n=1}^{+\infty} p(= n) = \frac{1}{7} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{7}\right)^{n-1} \underset{j=n-1}{=} \frac{1}{7} \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{7}\right)^{j} = \frac{1}{7} \times \frac{1}{1 - \frac{2}{7}} = \frac{1}{5}$$

9. Il est immédiat que $C=\overline{A\cup B}$, l'union étant disjointe, on a

$$p(C)=1-p(A\cup B)=1-(p(A)+p(B))=0$$

Remarque : *$p(C)=0$ ne signifie pas que C ne se réalise jamais (par exemple, il suffit d'obtenir toujours des boules noires).*

Solution de l'exercice 11.4 : (énoncé ►)

1. (a) On montre par récurrence cette formule pour n entier naturel :
   - initialisation : la propriété est vraie au rang 1 : pour $n=1$ on a $1=\dfrac{1(1+1)}{2}$ est vérifié
   - on suppose que la propriété est vraie à un certain rang n et on doit montrer qu'elle est vraie au rang n+1 c'est à dire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}k=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$
     or $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}k=\sum_{k=1}^{n}k+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+n+1=(n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$
   - la propriété est héréditaire et vérifiée au rang 1 donc elle est vraie pour tout entier naturel n.

   Ainsi $\forall n\geq 1,\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$.

   (b) Le nombre total de boules dans l'urne est $1+2+\cdots+n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$.

   (c) $X(\Omega)=[\![1;n]\!]$
   Il y a équiprobabilité des tirages des $\dfrac{n(n+1)}{2}$ boules et il y a k boules numéro k alors
   $\forall k\in[\![1;n]\!], P(X=k)=\dfrac{k}{\frac{n(n+1)}{2}}=\dfrac{2k}{n(n+1)}$ en particulier pour $k=n$ on a bien $P(X=n)=\dfrac{2}{n+1}$.

   (d) $E(X)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}kP(X=k)=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{2}{n(n+1)}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{2n+1}{3}$

2. (a) $Y(\Omega)=[\![10;10]\!]$.
   Un tirage correspond a un schéma de Bernoulli puisqu'il y a succès : la boule tirée porte le numéro n avec une probabilité $p=\dfrac{2}{n+1}$ ou ne porte pas le numéro n avec une probabilité $q=1-p$.
   On répète 10 fois ce tirage dans les mêmes conditions (indépendance des tirages) puisqu'il y a remise de la boule dans l'urne après chaque tirage, et Y compte le nombre de succès, donc Y suit une loi binômiale de paramètres 10 et $p=\dfrac{2}{n+1}$
   $\forall k\in[\![10;10]\!] P(Y=k)=\dbinom{10}{k}\left(\dfrac{2}{n+1}\right)^k\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{10-k}$

   (b) $E(Y)=10p=\dfrac{20}{n+1}$ et $V(Y)=npq=\dfrac{20(n-1)}{(n+1)^2}$

3. (a) $Z(\Omega)=\mathbb{N}^*$
   Pour un tirage, on considère les 2 issues : la boule tirée porte le numéro n, de probabilité $p=\dfrac{2}{n+1}$ et son contraire, de probabilité $q=1-p$.
   On répète indéfiniment ce tirage dans les mêmes conditions (indépendances des tirages) puisqu'il y a remise de la boule dans l'urne après chaque tirage, et Z compte le rang du 1er succès, donc Z suit une loi géométrique de paramètre $\dfrac{2}{n+1}$.
   $\forall k\in\mathbb{N}^*, P(Z=k)=\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{k-1}\dfrac{2}{n+1}$

(b) $E(Z)=\dfrac{1}{p}=\dfrac{n+1}{2}$ et $V(Z)=\dfrac{q}{p^2}=\dfrac{n^2-1}{4}$

Solution de l'exercice 12.1 : (énoncé ►)

On reconnait la densité de la loi exponentielle de paramètre 2.

Elle admet donc une espérance $\boxed{E(X)=\frac{1}{2}}$

Solution de l'exercice 12.2 : (énoncé ►)

1. Sur $]-\infty;0[$, F est une fonction nulle donc continue. Sur $[0;+\infty[$ la fonction $x\to 1-e^{-x}$ est continue donc F est continue sur cet intervalle.

   De plus $\lim\limits_{x\to 0^-} F(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x)=0=F(0)$.

   Donc F est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Sur $]-\infty;0[$, F est une fonction constante donc de classe $\mathbb{C}^1$. Sur $[0;+\infty[$ la fonction $x\to 1-e^{-x}$ est de classe $\mathbb{C}^1$ donc F est de classe $\mathbb{C}^1$ sur $[0;+\infty[$.

   Ainsi F est de classe $\mathbb{C}^1$ sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ et pour $x\neq 0$:

$$F'(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ e^{-x} & \text{si } x\geq 0\end{cases}$$

X est donc bien une variable à densité et une densité de X est $f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ e^{-x} & \text{si } x\geqslant 0\end{cases}$ **Solution de l'exercice**

12.3 : (énoncé ►)

1. Sur $]-\infty;1[$, F est une fonction constante donc continue. Sur $[1;+\infty[$, , F est continue comme addition de fonctions usuelles continues.

   La continuité ne pose problème qu'en 1 : pr $\lim\limits_{x\to 1^-} F(x)=\lim\limits_{1^+} F(x)=0=F(1)$ donc F est continue en 1.

   Donc F est continue sur $\mathbb{R}$.

2. A l'aide des fonctions usuelles on voit que F est de classe $\mathbb{C}^1$ sur $]1;+\infty[$ et sur $]-\infty;1[$ ainsi F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 1.

3. $\forall x<1, F'(x)=0$ et $\forall x>1, F'(x)=\dfrac{1}{x^2}>0$

   AInsi $\forall x\in\mathbb{R}-\{1\}, F'(x)\geqslant 0$ et comme F est continue, F est bien croissante sur $\mathbb{R}$.

4. Enfin $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=1$

Conclusion :

On peut donc dire que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X à densité. Une densité de X est donnée par :

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<1\\ \dfrac{1}{x^2} & \text{si} x\geq 1\end{cases}$$

Solution de l'exercice 12.4 : (énoncé ►)

1. Sur $]-\infty;1[$, $|xf(x)|=0$ donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{1}|xf(x)|\,dx$ converge.

   Sur $[1;+\infty[$, $|xf(x)|=\dfrac{2}{x^2}$ et donc $\displaystyle\int_{1}^{+\infty}|xf(x)|\,dx$ converge car c'est une intégrale de Riemann avec $2>1$.

   Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\,dx$ est absolument convergente ce qui signifie que X admet une espérance qui vaut $E(X)=\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_1^x\frac{2}{t^2}\,dt=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-2}{t}\right]_1^x=2.$

2. Sur $]-\infty;1[$, $|x^2f(x)|=0$ donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{1}|x^2f(x)|\,dx$ converge.

   Sur $[1;+\infty[$, $|x^2f(x)|=\dfrac{2}{x}$ et donc $\displaystyle\int_{1}^{+\infty}|x^2f(x)|\,dx$ diverge.

   Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\,dx$ ne converge pas absolument et ainsi X n'admet pas de moment d'ordre 2 et donc n'admet pas de variance.

Solution de l'exercice 12.5 : (énoncé ►)

1.
   - La fonction $t\mapsto 0$ est à valeurs réelles positives ou nulles sur $]-\infty;0[$
     La fonction $t\mapsto\dfrac{1}{8}$ est à valeurs réelles positives ou nulles sur $[0;4]$
     La fonction $t\mapsto\dfrac{2}{t^2}$ est à valeurs réelles positives ou nulles sur $]4;+\infty[$
     Ainsi f est à valeur réelles positives ou nulles sur $\mathbb{R}$.
   - La fonction $t\mapsto 0$ est continue sur $]-\infty;0[$
     La fonction $t\mapsto\dfrac{1}{8}$ est continue sur $[0;4]$
     La fonction $t\mapsto\dfrac{2}{t^2}$ est continue sur $]4;+\infty[$
     AInsi f est continue sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en un nombre fini de points (qui sont 0 et 4).
   - $\displaystyle\int_{-\infty}^{0}f(t)\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}0\,dt=0$
     $\displaystyle\int_{0}^{4}f(t)\,dt=\int_{0}^{4}\frac{1}{8}\,dt=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$
     Soit $X>4$. $\displaystyle\int_4^X f(t)\,dt=\int_4^X\frac{2}{t^2}\,dt=2\left[\frac{-1}{t}\right]_4^X=\frac{-2}{X}+\frac{2}{4}$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{-2}{X}$ alors $\displaystyle\int_4^{+\infty}f(t)\,dt$ converge et $\displaystyle\int_4^{+\infty}f(t)\,dt=\frac{1}{2}$
     D'après la relation de Chasles il vient $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,dt$ est convergente et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,dt=1$

   alors f est une densité de probabilité d'une variable X.

2. Par définition , $\forall x\in\mathbb{R}$, $\quad F(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$
   - Soit $x<0$, alors $F(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{x}0dt=0$
   - Soit $x\in[0;4]$ alors $F(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{0}0dt+\int_0^x\frac{1}{8}dt=\frac{x}{8}$
   - Soit $x>4$ alors $F(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{0}0dt+\int_0^4\frac{1}{8}dt+\int_4^x\frac{2}{t^2}dt=\frac{1}{2}+2\left[\frac{-1}{t}\right]_4^x=1-\frac{2}{x}$

   Conclusion : $F(x)=\begin{cases}0 \text{ si } x<0\\ \dfrac{x}{8}\text{ si } 0\le x\le 4\\ 1-\dfrac{2}{x}\text{ si } x>4\end{cases}$

3. Soit $X>4$. $\displaystyle\int_4^X tf(t)\,dt=\int_4^X \frac{2}{t}\,dt=2\,[\ln t]_4^X=2\ln X-2\ln 4$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 2\ln X=+\infty$
alors $\displaystyle\int_4^{+\infty} tf(t)\,dt$ diverge ; il est inutile d'étudier les autres intégrales, la variable aléatoire X n'admet pas d'espérance.
4. $P(X>4)=\displaystyle\int_4^{+\infty} f(t)dt=\frac{1}{2}$ (déjà calculé)
$P(3<X\leqslant 4)=\displaystyle\int_3^4 f(t)dt=\int_3^4\frac{1}{8}dt=\frac{1}{8}$
5. $\frac{3}{4}$ étant supérieur à $\frac{1}{2}$ on prend la dernière expression de $F(x)$:
$F(x)=\frac{3}{4}\Leftrightarrow 1-\frac{2}{x}=\frac{3}{4}\Leftrightarrow\frac{2}{x}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow x=8.$
La solution est 8.

Solution de l'exercice 12.6 : (énoncé ►)

1. (a) Pour tout réel $A\geq 1$,
$$\int_1^A f(x)\,dx=\int_1^A e^{1-x}dx=\left[-e^{1-x}\right]_1^A=1-e^{1-A}$$
   (b) f est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ et positive sur $\mathbb{R}$
   Et comme $1-e^{1-A}\to 1$ quand $A\to+\infty$ alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx=1$ et donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=1.$
   Conclusion : $\boxed{f \text{ est une densité.}}$
2. La fonction F_X de répartition de X est donnée par
$$\begin{aligned}F_X(x) &= \int_{-\infty}^x f(t)\,dt=\int_{-\infty}^x 0dt=0 \text{ si } x<1\\ &= \int_{-\infty}^1 0dt+\int_1^x e^{1-t}dt=1-e^{1-x} \text{ si } x\geq 1\end{aligned}$$
3. (a) La fonction de répartition F_Y de Y est définie par :
$$\begin{aligned}F_Y(y) &= \mathrm{P}(Y\leq y)=\mathrm{P}(X\leq y+1)\\ &= F_X(y+1)\end{aligned}$$
   avec $y+1<1\Longleftrightarrow y<0$ donc
$$\begin{cases}F_Y(y)=1-e^{-y} & \text{si } y\geq 0\\ F_Y(y)=0 & \text{si } y<0\end{cases}$$
   (b) On reconnait dans cette fonction la fonction de répartition d'une variable loi $\mathscr{E}(1)$
   Donc Y est à densité et $Y\hookrightarrow\mathscr{E}(1)$ d'où $E(Y)=\frac{1}{1}=1$ et $V(Y)=1$
   (c) Et comme $X=Y+1$ alors X a une espérance et une variance.
   Conclusion : $\boxed{E(X)=1+1=2 \text{ et } V(X)=1}$

Index